Matrices symétriques

Exercice 1. Diagonaliser les matrices suivantes en base orthonormée :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Trouver une racine carrée des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. On considère les matrices

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que U et V sont orthogonales. Dire si ce sont des symétries, des rotations, ou ni l'un ni l'autre. Le cas échéant, déterminer l'axe de rotation.

Exercice 4. On considère l'endormorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. On pose $B = {}^tAA$. Dire pourquoi B est diagonalisable. Sans calcul, que peut-on dire de ses valeurs propres ?

b. Diagonaliser B en base orthonormée.

c. Déterminer $|A|$, la racine carrée (symétrique positive) de B.

d. Déterminer la matrice orthogonale V telle que $A = V|A|$.

Exercice 5.

a. Soit $S \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et orthogonale.
   - (i) Quelles sont les valeurs possibles pour les valeurs propres de S ?
   - (ii) Dans le cas $n = 2$ montrer que S est soit I_2, soit $-I_2$, soit conjuguée à $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

b. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.
   - (i) Montrer que les valeurs propres de A sont imaginaires pures.
   - (ii) Que peut-on dire de la matrice iA ? En déduire que A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.