Université de Caen
UFR Sciences
L1 MASS/Info

2e semestre 2013-2014
Mathématiques

Exercices

Table des matières

Première partie
Algèbre

1 Espaces vectoriels

1.1 Sous-espaces vectoriels

Exercice 1. Représenter les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ et dire si ce sont des sous-espaces vectoriels :
— $E = \{(2,1)\}$
— $F = \{(1,2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$
— $G = \{(2t,-t) \mid r \in \mathbb{R}\}$
— $H = \{(t,t) \mid t > 0\}$
— $I = \{(t^2,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$
— $J = \{(s,s+t) \mid s,t \in \mathbb{R}\}$

Exercice 2. Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?
— $E = \{(2t,0,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$,
— $F = \{(0,2t,s) \mid s,t \in \mathbb{R}\}$,
— $G = \{(t+s,2t-3s,s) \mid s,t \in \mathbb{R}\}$,
— $H = \{(2t^2,0,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$,
— $I = \{(t,st,s) \mid s,t \in \mathbb{R}\}$,
— $J = \{(s+t^2,-s,t^2) \mid s,t \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 3. Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?
— $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+3z=0,\ 2y-z=0,\ x-2y+3z=0\}$,
— $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2y=x,\ x^2+z=0\}$.
— $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2=y^2,\ x+y+z=0,\ z=0\}$.

Exercice 4. À l'aide de la méthode du pivôt de Gauss, mettre les sous-espaces vectoriels suivants sous forme paramétrée :
— $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-2y+z=0 \text{ et } x+y-2z=0 \text{ et } 5x-4y-z=0\}$,
— $I = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+y-z=0 \text{ et } -4x-y+z=0\}$,
— $J = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x-4y+2z=0 \text{ et } 3x-6y+3z=0\}$,
— $K = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x+y-2z-t=0 \text{ et } x+y-z+t=0 \text{ et } -4x-y+4z+5t=0\}$,
— $L = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+3z-2t=0 \text{ et } x+3y+4z-3t=0 \text{ et } 2x+4y+8z-3t=0\}$,
— $M = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y-3z+2t=0 \text{ et } 2x+y-3z+t=0 \text{ et } y+z-t=0\}$.

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}^2$ on considère les sous-ensembles :
— $L_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy=1\}$,
— $L_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+3y=2\}$,
— $L_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x+2y=0\}$.
Ces ensembles sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 6. Déterminer ceux des sous-ensembles suivants qui sont des sous-espaces vectoriels de E :
— $E_1 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in E = \mathbb{R}^5 \mid x_1-x_2+x_3+x_4+x_5=0\}$,
— $E_2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in E = \mathbb{R}^3 \mid x_1^2+x_2^2=x_3^2\}$,
— $E_3 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in E = \mathbb{R}^4 \mid x_1-x_2+x_3+x_4=1\}$.

Exercice 7. On considère les sous-ensembles

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 = E \mid x+y-z=0\} \quad \text{et}$$
$$G = \{(a-b,a+b,a-3b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}.$$

a. Montrer que F et G sont des espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
b. Déterminer $F \cap G$.

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}^2$ on considère les sous-ensembles :
— $L_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$,
— $L_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy=0\}$,
— $L_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=y\}$,
— $L_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|=|y|\}$,
— $L_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2=y^2\}$,
— $L_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=2y\}$.
Ces ensembles sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille n est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 10. Soit E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Parmi les sous-ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de E ?
— F_1 : ensemble des applications impaires,
— F_2 : ensemble des applications qui s'annulent en 0,
— F_3 : ensemble des applications qui s'annulent en un point,
— F_4 : ensemble des applications telles que $f(1)=0$,
— F_5 : ensemble des applications positives,
— F_6 : ensemble des applications telles que $f(0)=1$,
— F_7 : ensemble des applications continues.

Exercice 11. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes à coefficients réels. Déterminer celles des parties suivantes qui sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$:

— $E_1 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg P = n\}$ (n étant un entier naturel fixé),
— $E_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg P \leq n\}$ (n étant un entier naturel fixé),
— $E_3 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$.

Exercice 12. On considère $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels mais que le sous-ensemble $E \cup F$, que l'on représentera dans le plan, n'est pas un sous-espace vectoriel.

Exercice 13. On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \{(r + 2t, r + s + t, r + 2s, t - s) \mid r, s, t \in \mathbb{R}\},$$
$$G = \{(x, y, z, t) \mid x + y - 2z - t = 0\}.$$

a. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
b. Déterminer $F \cap G$.

Exercice 14. On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid b - 2c + d = 0\},$$
$$G = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = d \text{ et } b = 2c\}.$$

a. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
b. Déterminer $F \cap G$.

Exercice 15. Soit E un espace vectoriel, U et V des sous-espaces vectoriels de E

a. Soit $W = \{(x, y) \in E \times E \mid x \in U, y \in V\}$. Montrer que W est un sous-espace vectoriel de $E \times E$.
b. Soit $S = \{x + y \mid x \in U, y \in V\}$. Montrer que S est un sous-espace vectoriel de $E \times E$. *On procèdera par vérification directe ou en utilisant une application linéaire.*
c. Soit $D = \{(x, x) \in E \times E \mid x \in E\}$. Montrer que D est un sous-espace vectoriel de $E \times E$. *On procèdera par vérification directe ou en utilisant une application linéaire.*

Exercice 16. On considère le système formé des 3 équations suivantes, à résoudre dans $\mathbb{R}^5$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1. \end{cases}$$

a. Déterminer l'ensemble S des solutions de ce système.
b. (i) Cet ensemble S est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$?
(ii) Montrer que le vecteur $v_0 = (0, 0, 0, 0, 1)$ est une solution du système.
(iii) Montrer que l'on peut écrire $S = v_0 + E = \{v_0 + v \mid v \in E\}$, où E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$.
(iv) Montrer que E est l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille finie de vecteurs de E.

Annales

Exercice 17. (Partiel n° 1, 2011)
On pose $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On pose $V = \{(t^2, -t^2, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Le sous-ensemble V est-il un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 18. (Partiel n° 1, 2012)

a. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit F un sous-ensemble de E.
Quand peut-on dire que F est un sous-espace vectoriel de E ?
b. Pour chacun des ensembles suivants, dire s'il s'agit ou non d'un espace vectoriel (avec démonstration) :
— $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ et } y \text{ sont des réels tels que } y \leq 0\}$,
— $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - z = 2\}$,
— $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$,
— $E_4 = \{(2a - b, a + 3b) \mid a, b \text{ réels}\}$,
— $E_5 = \{f \text{ fonction de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ telle que } f(1) = f(-1) = 0\}$.
c. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.
On considère l'ensemble H défini par $H = F \cap G = \{u \in E \mid u \in F \text{ et } u \in G\}$.
Montrer que H est non vide.
Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 19. (Partiel n° 2, 2012) Soient E un espace vectoriel et U et V deux sous-espaces vectoriels de E. On pose $H = U + V = \{u + v \mid u \in U, v \in V\}$.

a. Montrer que $U \cup V \subset U + V$.
b. Montrer que $U + V$ est un sous-espace vectoriel de E.
c. Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $U \cup V \subset F$.
Montrer que $U + V \subset F$.

Exercice 20. (Partiel n° 1, 2013)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et H un sous-ensemble de E.
Quelles conditions doit vérifier H pour que H soit un sous-espace vectoriel de E ?
Soient F, G les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\},$$
$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}.$$

a. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
b. Montrer que $F \cap G = \{(0, a, -a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.
c. $F \cup G$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
d. Soit H un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ tel que $F \cup G \subset H$.
  (i) Montrer que $u = (1, 1, -2)$, $v = (0, 1, -1)$ et $w = (1, 0, 1)$ sont dans H.
  (ii) Soit λ, μ, ν des réels. Montrer que $\lambda u + \mu v + \nu w$ est un élément de H.
  (iii) On fixe x, y, $z \in \mathbb{R}$. Déterminer les réels λ, μ, ν tels que
$$(x, y, z) = \lambda u + \mu v + \nu w.$$
  (iv) En déduire que $H = \mathbb{R}^3$.

1.2 Bases, dimension

Exercice 21.
Les vecteurs u suivants sont-ils combinaisons linéaires des vecteurs v_i dans E ?
a. $E = \mathbb{R}^2$, $u = (1, 2)$, $v_1 = (1, -2)$, $v_2 = (2, 3)$;
b. $E = \mathbb{R}^3$, $u = (2, 5, 3)$, $v_1 = (1, 3, 2)$, $v_2 = (1, -1, 4)$;
c. $E = \mathbb{R}^3$, $u = (3, 1, m)$, $v_1 = (1, 3, 2)$, $v_2 = (1, -1, 4)$
(on discutera selon les valeurs de m).

Exercice 22. Les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ?
Si ce n'est pas le cas, former une relation linéaire liant ces vecteurs :
a. $x_1 = (1, 0, 1)$ et $x_2 = (1, 2, 2)$;
b. $x_1 = (1, 0, 0)$ et $x_2 = (1, 1, 0)$ et $x_3 = (1, 1, 1)$;
c. $x_1 = (1, 2, 1)$ et $x_2 = (2, 1, -1)$ et $x_3 = (1, -1, -2)$;
d. $x_1 = (1, -1, 1)$ et $x_2 = (2, -1, 3)$ et $x_3 = (-1, 1, -1)$.

Exercice 23. Dans chacun des cas suivants, les familles données sont-elles des familles libres ?
a. $u = (1, 2, 3)$, $v = (1, -4, 6)$;
b. $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, 0, 1)$, $w = (-1, 2, -3)$;
c. $u = (1, 2, 1, 0)$, $v = (-1, 1, 1, 1)$, $w = (2, -1, 0, 1)$, $t = (2, 2, 2, 2)$.
d. On considère les 3 polynômes P_i donnés par :
$P_1(X) = 1$, $P_2(X) = 2X + 3X^2$, $P_3(X) = 3X - X^2 + X^3$.
e. On considère les 3 fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f_1(x) = e^{-x}$, $f_2(x) = 1$, $f_3(x) = e^x$.
f. On considère les 3 polynômes Q_i donnés par :
$Q_1(X) = X - 1$, $Q_2(X) = X^2 - X + 1$, $Q_3(X) = 2X^2$.
g. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;
h. $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 24. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs $u = (1, -1, 4)$, $v = (1, 2, 3)$ et $w = (1, -1, 2)$. Montrer que (u, v, w) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 25. Les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-ils linéairement indépendants ?
a. $u = (2, 1, 1)$, $v = (1, 3, 1)$, $w = (-2, 1, 3)$;
b. $u = (1, 0, 3)$, $v = (0, 1, 2)$, $w = (2, -3, 0)$;
c. $u = (2, 1, 1)$, $v = (1, 2, 1)$, $w = (1, 1, 2)$.

Exercice 26. Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner une base de E et sa dimension.

Exercice 27.
a. Dans $\mathbb{R}^3$, soient $u = (-1, 1, 1)$, $v = (1, -1, 1)$.
Montrer que la famille (u, v) est libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}^3$.
b. Dans $\mathbb{R}^4$, soient $u = (1, 1, 1, 1)$, $v = (-1, 1, 1, 1)$.
Montrer que la famille (u, v) est libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 28. Pour chacun des ensembles suivants, vérifier qu'il s'agit d'espaces vectoriels, en donner une base et la dimension :

$$A_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 2z = 0\},$$
$$A_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z = 0 \text{ et } x = 0\},$$
$$A_3 = \{(a + b, b - a, a + b), a, b \in \mathbb{R}\},$$
$$A_4 = \{(a, 2a, a), a \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 29. On considère les matrices :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La famille (M_1, M_2, M_3, M_4) est-elle une base de $M_2(\mathbb{R})$?

Exercice 30. On considère les familles de vecteurs B_1, B_2 suivantes dans $\mathbb{R}^3$:

$$B_1 = ((1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1)),$$
$$B_2 = ((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)).$$

a. Montrer que B_1 et B_2 sont des bases de $\mathbb{R}^3$.
b. Soit X le vecteur de coordonnées (x,y,z) dans la base $B = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$. Donner les coordonnées de X dans la base B_1 en fonction de x, y, z.
c. Donner les coordonnées de X dans la base B_2 en fonction de x, y, z.

Exercice 31. Montrer que les vecteurs $u_1 = (0,1,1)$, $u_2 = (1,0,1)$ et $u_3 = (1,1,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
Trouver les coordonnées dans cette base du vecteur $u = (1,1,1)$.

Exercice 32.

a. Montrer que les vecteurs $u_1 = (-1,2,3)$, $u_2 = (1,-2,3)$ et $u_3 = (1,2,-3)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Décomposer dans cette base le vecteur $u = (1,1,1)$.
b. Montrer que les vecteurs $v_1 = (0,1,1,1)$, $v_2 = (1,0,1,1)$ et $v_3 = (1,1,0,1)$ et $v_4 = (1,1,1,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^4$. Décomposer dans cette base les vecteurs $u = (1,1,1,1)$ et $v = (1,0,0,0)$.

Exercice 33. Déterminer une base des sous-espaces vectoriels suivant de $\mathbb{R}^4$.

a. $E_1 = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4)$ avec $u_1 = (1,2,-3,4)$, $u_2 = (2,4,-5,9)$, $u_3 = (-2,-1,3,1)$, $u_4 = (3,0,-1,-4)$.
b. $E_2 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 2x_2 - x_3, x_4 = x_1 + x_2 + x_3\}$.

Annales

Exercice 34. (Partiel, 2002) On note $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ les 3 vecteurs de la base canonique (e_1,e_2,e_3) de $\mathbb{R}^3$. On pose $v_1 = 2e_1 + e_2 + e_3$, $v_2 = e_1 + 2e_2 + e_3$ et $v_3 = e_1 + e_2 + e_3$.

a. Écrire v_1,v_2 et v_3 sous forme de triplets de coordonnées.
b. Montrer que la famille (v_1,v_2,v_3) constitue une base de $\mathbb{R}^3$.
c. Déterminer les coordonnées dans la base (v_1,v_2,v_3) du vecteur $w = 2e_1 + e_3$.

Exercice 35. (Partiel n° 4, 2010)

a. Qu'appelle-t-on rang d'une famille de vecteurs ?
b. Soit (u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^5$ définie par :

$$u_1 = (1,0,2,1,2), \; u_2 = (1,2,-1,-1,0), \; u_3 = (2,1,0,0,1),$$
$$u_4 = (0,1,1,0,1), \; u_5 = (3,4,0,-1,2).$$

Quel est le rang de la famille (u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) ?
Soit $F = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5)$. Donner une base de F.

Exercice 36. (Partiel n° 4, 2011)

a. Qu'appelle-t-on rang d'une famille de vecteurs ?
b. Soit (u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^5$ définie par :

$$u_1 = (1,0,0,1,2), \; u_2 = (1,0,1,1,0), \; u_3 = (2,-1,0,4,3),$$
$$u_4 = (0,-1,-1,2,1), \; u_5 = (2,1,2,0,1).$$

Quel est le rang de la famille (u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) ?
Soit $F = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5)$. Donner une base de F.

1.3 Sommes et intersections de sous-espaces

Exercice 37. Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par :

$$F = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid b - 2c + d = 0\},$$
$$F = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = d \text{ et } b = 2c\}.$$

Donne une base de F, de G et de $F \cap G$. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.

Exercice 38. Dans $\mathbb{R}^3$, soient $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (0,1,0)$, $v_1 = (0,1,1)$ et $v_2 = (1,0,1)$. On pose $F = \mathrm{Vect}(u_1,u_2)$ et $G = \mathrm{Vect}(v_1,v_2)$. Déterminer $F \cap G$.

Exercice 39. On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs suivants :

$$v_1 = (1,3,-2,2), \quad v_2 = (2,7,-5,6), \quad v_3 = (1,2,-1,0),$$
$$w_1 = (1,3,0,2), \quad w_2 = (2,7,-3,6), \quad w_3 = (1,1,6,-2).$$

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par (v_1,v_2,v_3) et G celui engendré par (w_1,w_2,w_3).

a. Montrer que v_3 est une combinaison linéaire de v_1 et v_2.
En déduire une base de F.

b. Montrer que w_3 est une combinaison linéaire de w_1 et w_2.
En déduire une base de G.

c. Montrer que la famille (v_1,v_2,w_1,w_2) est liée. En déduire une base de $F+G$.

d. Soit $E = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\}$. Donner une base de E.

e. Montrer que $F+G=E$. Quelle est la dimension de $F \cap G$?

Annales

Exercice 40. (Examen, Session 1, 2012)
On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \{(r+2t, r+s+t, r+2s, t-s) \mid r,s,t \in \mathbb{R}\},$$
$$G = \{(x,y,z,t) \mid x+y-2z-t=0\}.$$

a. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.

b. Montrer que les vecteurs suivants forment une famille génératrice de F :

$$u = (1,1,1,0), \quad v = (0,1,2,-1), \quad w = (2,1,0,1).$$

Déterminer la dimension de F et une base de F.

c. Déterminer la dimension de G et une base de G.

d. Rappeler la formule permettant de calculer $\dim F \cap G$ en fonction des dimensions de F, G et $F+G$. Sans déterminer $F+G$ ni $F \cap G$, en déduire que $\dim F \cap G \geq 1$.

Exercice 41. (Examen, Session 2, 2012)
On considère le sous-ensemble suivant de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \{(x,y,z,t) \mid x+y-z-t=0 \ \text{ et } \ 2x+y-z=0\}.$$

a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

b. Déterminer une base de F.

c. On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$u = (1,1,1,0), \quad v = (1,2,1,1), \quad w = (1,0,1,-1).$$

Déterminer le rang de la famille (u,v,w).

d. On note G le sous-espace engendré par la famille (u,v,w).
On admet que F et G engendrent $\mathbb{R}^4$.

(i) Rappeler la formule permettant de calculer la dimension de $F \cap G$ en fonction des dimensions de F, G et $F+G$.

(ii) Montrer que F et G sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 42. (Examen, Session 1, 2013)
On considère les sous-ensembles suivants de l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}^4$:

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-2y+z+t=0\},$$
$$G = \{(x-y, x+y, x-2y, x+2y) \text{ avec } (x,y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

a. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.

b. Déterminer une base B_F de F et en déduire la dimension de F.

c. Déterminer une base B_G de G et en déduire la dimension de G.

d. Rappeler la formule permettant de calculer $\dim(F \cap G)$ en fonction des dimensions de F, G et $F+G$. Sans déterminer $F+G$ ni $F \cap G$, en déduire que $\dim(F \cap G) \geq 1$.

Exercice 43. (Examen, Session 2, 2013)
On considère les sous-ensembles suivants de l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}^4$:

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-2y+z+t=0 \text{ et } x-z+3t=0\},$$
$$G = \{(2x+y+2z, y, x-z, -x-z) \text{ avec } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}.$$

a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
On admettra que c'est aussi le cas de G.

b. Déterminer une base B_F de F et en déduire la dimension de F.

c. Déterminer une base B_G de G et en déduire la dimension de G.

d. Rappeler la formule permettant de calculer $\dim(F \cap G)$ en fonction des dimensions de F, G et $F+G$. Sans déterminer $F+G$ ni $F \cap G$, en déduire que $\dim(F \cap G) \geq 1$.

e. Montrer que $F \subset G$. En déduire $\dim(F \cap G)$.

2 Applications linéaires

2.1 Généralités

Exercice 44. Parmi les applications suivantes, déterminez celles qui sont des applications linéaires :
— $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x + y + 2z$,
— $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x + y + 1$,
— $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy$,
— $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x - 2z$,
— $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - y)$,
— $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x^2, y^2)$,

Exercice 45. Soit f l'application définie de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4, x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4).$$

a. Montrer que f est une application linéaire.
b. Déterminer le noyau de f. Est-ce que f est injective ?
c. Est-ce que f est surjective ?

Exercice 46. On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + y - z, x - y + z, -x + y + z).$$

a. Montrer que f est une application linéaire.
b. Montrer que f est injective.
c. Montrer que f est bijective et calculer $f^{-1}(a, b, c)$.
Calculer $f^{-1}(f(x, y, z))$ et $f(f^{-1}(a, b, c))$.

Exercice 47. On considère l'espace vectoriel $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg P \leq 4\}$ et on considère l'application f définie de E dans $\mathbb{R}[X]$ par $f(P) = Q$ avec $Q(X) = XP'(X) - P(X)$.
a. Montrer que f est une application linéaire.
b. Montrer que $f(E) \subset E$.
c. L'application f est-elle injective ?
d. L'application f considérée comme application de E dans E est-elle surjective ?

Exercice 48. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + 2z, x + y + z, -x - 2z).$$

a. Montrer que f est une application linéaire.
b. Déterminer $\operatorname{Ker} f$. L'application f est-elle surjective ?
c. Montrer qu'il existe $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $\operatorname{Ker} f = \{au \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 49. Parmi les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ suivantes, lesquelles sont $\mathbb{R}$-linéaires, $\mathbb{C}$-linéaires ? (Pour f_1 et f_2, a est un nombre complexe fixé.)

$$f_1(z) = z + a, \quad f_2(z) = az,$$
$$f_3(z) = \operatorname{Re}(z), \quad f_4(z) = \operatorname{Im}(z), \quad f_5(z) = \bar{z}.$$

Exercice 50. Soit E l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$. On considère l'ensemble

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E \;\middle|\; a + d = 0 \right\}.$$

a. Montrer que F est un espace vectoriel de E en utilisant la définition.
b. On considère l'application $\operatorname{Tr} : E \to \mathbb{R}$ qui à la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associe $\operatorname{Tr}(A) = a + d$. Montrer que Tr est une application linéaire.
c. En déduire une autre démonstration du fait que F est un espace vectoriel.

Exercice 51. Soit E, F et G trois espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans G et g une application linéaire de F dans G. On définit une application h de $E \times F$ dans G par $h(x, y) = f(x) + g(y)$. Montrer que h est une application linéaire.

Exercice 52. Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. On définit la fonction f de E dans $\mathbb{R}$ en posant $f(P) = a - d$, où $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$.
a. Montrer que f est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.
b. Déterminer $\operatorname{Ker} f$.
c. L'application f est-elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 53. Soit n un entier strictement positif. On note $E = \mathbb{R}[X]_n$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On considère l'application f de E dans E définie par $f(P) = Q$, où $Q(X) = \frac{1}{2}(P(X) + P(-X))$.
a. Montrer que f est une application linéaire et que $f \circ f = f$.
b. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Annales

Exercice 54. (Partiel n° 2, 2011)

a. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Donner la définition d'une application linéaire de E dans E.

b. Les applications suivantes sont-elles linéaires ?
Les réponses devront être justifiées.
— f_1 est définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x, y, z) = x - y + 2z$.
— f_2 est définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x, y) = xy$.
— f_3 est définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x, y) = x - y - 1$.
— f_4 est définie de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ par $f(P) = P'$ où P' désigne le polynôme dérivé du polynôme P..

Exercice 55. (Partiel n° 2, 2011)
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit F un sous-ensemble de E.

a. Quand peut-on dire que F est un sous-espace vectoriel ?

b. Soit f une application linéaire de E dans E. On pose $F = \{u \in E \mid f(u) = 2u\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel.

Exercice 56. (Partiel n° 2, 2011) Soit E l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$. On définit une application f comme suit :

$$f : E \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a - d.$$

a. Montrer que f est linéaire.

b. Définir $\operatorname{Ker} f$.

c. Déterminer $\operatorname{Ker} f$.

d. L'application f est-elle injective, surjective ?
(Les réponses doivent être justifiées).

Exercice 57. (Partiel n° 2, 2012) Soit f l'application définie de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ par

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_4, x_4 - x_1).$$

a. Montrer que f est une application linéaire.

b. Déterminer $\operatorname{Ker} f$.

c. L'application f est-elle une injection ?

d. Le vecteur $(1, 0, 0, 0)$ a-t-il un antécédent par f ? L'application f est-elle une surjection ?

2.2 Injectivité, surjectivité

Exercice 58. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_4 + x_5, x_2 + x_3 + x_4 - x_5).$$

a. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et la compléter en une base de $\mathbb{R}^5$.

b. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et la compléter en une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 59. Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On pose $u_1 = (1, 0, 1, 0)$, $u_2 = (-1, 1, 0, 1)$, $u_3 = (0, -1, 1, 0)$, $u_4 = (-1, 1, 1, 1)$. On définit l'application linéaire f en posant $f(e_1) = u_1$, $f(e_2) = u_2$, $f(e_3) = u_3$, $f(e_4) = u_4$.

a. Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, déterminer $f(u)$.

b. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même. On expliquera la méthode choisie et on citera les propriétés utilisées.

Exercice 60. On travaille dans $\mathbb{R}_3[X]$, espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 3.

a. Donner une base et la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$.

b. On définit les polynômes P_1, P_2, P_3, P_4 en posant $P_1(X) = 1$, $P_2(X) = 2X$, $P_3(X) = -2 + 4X^2$, $P_4(X) = -12X + 8X^3$. Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

c. Quelles sont les coordonnées du polynôme $X^2 + 2X - 1$ dans la base (P_1, P_2, P_3, P_4) ?

d. On définit une application $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ en posant $f(P) = Q$ où Q est le polynôme défini par $Q(X) = XP'(X) - P(X)$.

(i) Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$.
Calculer $f(P)$. En déduire $f(P_2)$.

(ii) L'application f est-elle injective ? Déterminer $\operatorname{Ker} f$ (on donnera une base de $\operatorname{Ker} f$ et sa dimension).

(iii) Peut-on conclure sans calculs si f est surjective ou non ?
Que vaut $\dim(\operatorname{Im} f)$? Donner une base de $\operatorname{Im} f$.

Annales

Exercice 61. (Partiel 2009) On travaille dans $\mathbb{R}_3[X]$, espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

a. Donner une base et la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$.

b. On définit f de $R_3[X]$ dans $R_3[X]$ en posant $f(P) = 3P - P'$, où P' désigne le polynôme dérivé de P.

c. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$.
Calculer $f(P)$.

d. L'application f est-elle surjective ? Déterminer $\operatorname{Im} f$ (on donnera une base de $\operatorname{Im} f$ et sa dimension).

e. Peut-on conclure sans calculs si f est injective ou non ?
Que vaut $\dim(\operatorname{Ker} f)$?
Vérifier que si $P_3(X) = X^3$ alors $f(P) = 0$. Que peut-on en déduire ?

f. Montrer que $\mathbb{R}_3[X] = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.
Montrer que la restriction de f à $\mathbb{R}_2[X]$ est une bijection.

Exercice 62. (Partiel 2009) Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose $u_1 = (0, -1, 1)$, $u_2 = (-1, 0, 2)$, $u_3 = (1, -1, 0)$. On définit l'application linéaire f en posant $f(e_1) = u_1$, $f(e_2) = u_2$, $f(e_3) = u_3$.

a. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f(u)$.

b. Montrer que f est un isomorphisme (c'est à dire une application linéaire bijective) de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même. On expliquera la méthode choisie et on citera les propriétés utilisées.

Exercice 63. (Partiel n° 4, 2011) On travaille dans $\mathbb{R}^4$.

a. Donner (sans démonstration) la base canonique et la dimension de $\mathbb{R}^4$.
On appellera $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ cette base canonique.

b. On définit les vecteurs u_1, u_2, u_3, u_4 en posant

$$u_1 = (-2, -1, 1, 0),\ u_2 = (-1, -1, 0, 1),$$
$$u_3 = (0, 1, 0, -2),\ u_4 = (1, 0, -1, -1).$$

Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.

c. Quelles sont les coordonnées du vecteur $u = (0, -2, -1, -2)$ dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4) ?

d. On définit l'application linéaire f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ en posant

$$f(x, y, z, t) = (x - y + z, y + z + t, 0, x + y + 3z + 2t).$$

(i) Calculer $f(u_1)$ et $f(u_2)$.

(ii) L'application f est-elle injective ? Déterminer $\operatorname{Ker} f$: on donnera une base de $\operatorname{Ker} f$ et sa dimension.
Déterminer un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans $\mathbb{R}^4$.

(iii) Calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$, $f(e_4)$.
Soit $F = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2))$.

(iv) Montrer que $f(e_3) \in F$ et $f(e_4) \in F$.

(v) Soit $v \in \mathbb{R}^4$, montrer que $f(v) \in F$. En déduire que $\operatorname{Im} f = F$.

Exercice 64. (Partiel n° 3, 2012)
On définit l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (3x - 2y, 4x - 3y)$.
On définit les deux vecteurs suivants de $\mathbb{R}^2$: $v_1 = (1, 1)$ et $v_2 = (-1, -2)$.

a. Donner la définition d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

b. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

c. Calculer le noyau de f.

d. Montrer que (v_1, v_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

e. Calculer $f(v_1)$ ainsi que $f(v_2)$ en fonction de v_1 et v_2.

f. En déduire que pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, on a $f \circ f(v) = v$ puis que f est bijective (on donnera l'inverse de f).

Exercice 65. (Partiel n° 2, 2013)
Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie par

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_2 + x_3, -x_1 - x_3, -x_1 + x_2 - 2x_3, 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 2x_4).$$

a. Rappeler la définition des applications linéaires.
Montrer que f est une application linéaire.

b. (i) Rappeler la définition du noyau d'une application linéaire. Déterminer $\operatorname{Ker} f$. *On montrera qu'il existe un vecteur $u \in \mathbb{R}^4$ à déterminer tel que* $\operatorname{Ker} f = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

(ii) L'application f est-elle injective ?

c. On considère le sous-ensemble $F \subset \mathbb{R}^4$ des vecteurs $v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ tels que $f(v) + v = 0$.

(i) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(ii) Déterminer F.
On donnera deux vecteurs v, $w \in \mathbb{R}^4$ tels que $F = \{\lambda v + \mu w \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

d. L'application f est-elle surjective ?

2.3 Sommes directes et projections

Exercice 66. Dans $\mathbb{R}^5$ on considère les vecteurs $u_1 = (1,0,2,0,0)$, $u_2 = (1,0,3,0,0)$, $v_1 = (0,1,0,-1,0)$, $v_2 = (0,2,0,2,0)$, et $v_3 = (0,1,0,0,1)$. Montrer que $\mathbb{R}^5 = \mathrm{Vect}(u_1,u_2) \oplus \mathrm{Vect}(v_1,v_2,v_3)$.

Exercice 67. On note (e_1,e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $u = (1,-1)$. On pose $F = \mathrm{Vect}\, u$ et $G = \mathrm{Vect}\, e_1$.

a. Montrer que $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$.

b. Représenter sur une figure les sous-espaces F et G, les vecteurs suivants, ainsi que leurs projetés sur F parallèlement à G : $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (1,-1)$, $v_3 = (0,-2)$, e_1, e_2.

c. On note $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la projection sur F parallèlement à G. Calculer $p(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 68. Dans $\mathbb{R}^2$ on considère les droites $D : x - y = 0$ et $E : x + y = 0$.
On note p la projection sur D parallèlement à E.

a. Monter que $\mathbb{R}^2 = D \oplus E$. Ainsi p est bien définie.

b. Déterminer les images par p des vecteurs e_1, e_2 de la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On pourra faire une figure.

c. Calculer $p(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Vérifier que $p \circ p = p$.

Exercice 69. On considère l'application linéaire $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par l'expression $p(x,y) = (x - 2y, 0)$. Montrer que p est une projection. Déterminer les sous-espaces F, G tels que p soit la projection sur F parallèlement à G.

Exercice 70. On fixe un réel $a \neq -1$ et on considère l'application linéaire $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$p(x,y) = \tfrac{1}{a+1}(ax + y, ax + y).$$

Vérifier que p est une projection. Déterminer en fonction de a les sous-espaces F, G tels que p soit la projection sur F parallèlement à G.

Exercice 71. On note (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère les sous-espaces suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y + z\}, \quad G = \mathrm{Vect}(1,0,-1).$$

a. Montrer que F et G sont en somme directe.

b. Déterminer une base de F. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

c. Décomposer les vecteurs e_1, e_2, e_3 dans la somme directe $F \oplus G$.

d. On note $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la projection sur F parallèlement à G. Déterminer l'expression de $p(x,y,z)$ en fonction de x, y et z.

e. Vérifier l'identité $p \circ p = p$. Montrer sans calcul que $p(2,1,1) = (2,1,1)$ et $p(-1,0,1) = (0,0,0)$. Déterminer l'expression de $q(x,y,z)$, où q est la projection sur G parallèlement à F.

Exercice 72. On note (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère les sous-espaces suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$D = \mathrm{Vect}(3,1,2), \quad E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y + 2z = 0\}.$$

a. Déterminer une base de E. Montrer que $\mathbb{R}^3 = D \oplus E$.
On note p la projection sur D parallèlement à E.

b. Trouver un scalaire λ tel que $e_1 - \lambda(3,1,2) \in E$.
En déduire la décomposition de e_1 dans la somme directe $D \oplus E$, ainsi que la valeur de $p(e_1)$.

c. Calculer $p(e_2)$ et $p(e_3)$. Donner l'expression de $p(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 73. On considère l'endomorphisme $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donné par

$$p(x,y,z) = \frac{1}{9}(5x - 4y + 2z, -4x + 5y + 2z, 2x + 2y + 8).$$

Montrer que p est une projection. Déterminer les sous-espaces F, G tels que p soit la projection sur F parallèlement à G. (On donnera des bases de F et G.)

Exercice 74. Pour toute valeur des paramètres réels a, b on considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donné par l'expression

$$f(x,y,z) = (ax + by + az, bx + ay + az, ax + ay + bz).$$

a. Calculer $(f \circ f)(1,0,0)$ en fonction de a et b.
En déduire que si f est une projection, alors $a = b$.

b. Pour quelles valeurs de a et b l'endomorphisme f est-il une projection non nulle ?

Annales

Exercice 75. (Partiel n° 4, 2012)
On note (e_1,e_2,e_3,e_4) la base canonique de $E = \mathbb{R}^4$, et on considère les vecteurs suivants de E :

$$u_1 = (1,-1,0,0), \; u_2 = (2,2,0,-1), \; v_1 = (-2,0,1,1), \; v_2 = (0,2,1,0).$$

On pose $F = \mathrm{Vect}(u_1,u_2)$, $G = \mathrm{Vect}(v_1,v_2)$ et $H = \{x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid z = t = 0\}$.

a. Montrer que les familles (u_1, u_2) et (v_1, v_2) sont libres.

b. Déterminer le rang de la famille (u_1, u_2, v_1, v_2).

c. A l'aide des questions précédentes, déterminer $\dim F$, $\dim G$ et $\dim(F+G)$. La somme $F+G$ est-elle directe ? Calculer $\dim(F \cap G)$.

d. Montrer que u_2 appartient à G, et en déduire une base de $F \cap G$.

e. Vérifier que G et H sont en somme directe. En déduire que (v_1, v_2, e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^4$, et donner un supplémentaire de G.

Exercice 76. (Partiel n° 3, 2013)
On note $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (y - z, -x + 2y - z, -x + y).$$

On pose $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (1, 1, 0)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$.

a. Rappeler la définition d'une base d'un espace vectoriel. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

b. Montrer que f est une application linéaire.

c. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$, en donner une base, et donner sa dimension.

d. (i) Calculer $f(u_1), f(u_2)$ et $f(u_3)$. *(Ce calcul doit être en accord avec le résultat de la question précédente.)* En déduire que $\mathrm{Im}(f)$ est engendrée par $f(u_1)$ et $f(u_2)$, c'est à dire que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(u_1), f(u_2))$.
 (ii) Calculer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et donner la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

e. Calculer $f \circ f(u_1)$, $f \circ f(u_2)$ et $f \circ f(u_3)$; en déduire que $f \circ f = f$.

f. (i) En utilisant l'égalité $f \circ f = f$ démontrée dans la question précédente, montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, on a $u - f(u) \in \mathrm{Ker}(f)$; en déduire que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$.
 (ii) En utilisant l'égalité $f \circ f = f$ démontrée dans la question précédente, montrer que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

g. Soit E un espace vectoriel, soient F et G deux sous espaces vectoriels de E, rappeller ce que signifie : « E est la somme directe de F et G ». L'espace $\mathbb{R}^3$ est-il la somme directe de ses sous-espaces $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$?

Exercice 77. (Partiel n° 4, 2013)
On considère les vecteurs, sous-espaces et applications linéaires suivants :

$$u_1 = (2, 0, 3), \quad u_2 = (-2, 3, 0), \quad u_3 = (0, 1, 1), \quad v = (3, -3, 1),$$
$$F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3), \quad G = \mathrm{Vect}(v),$$
$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \ (x, y, z) \mapsto 3x + 2y - 2z.$$

a. (i) Déterminer le rang de la famille (u_1, u_2, u_3).
 (ii) Justifier que $\dim \mathrm{Im}\,\varphi = 1$. À l'aide du théorème du rang, en déduire la dimension de $\mathrm{Ker}\,\varphi$.
 (iii) Vérifier que u_1, u_2, $u_3 \in \mathrm{Ker}\,\varphi$. En déduire que $F \subset \mathrm{Ker}\,\varphi$.
 (iv) À l'aide des questions précédentes, montrer que $F = \mathrm{Ker}\,\varphi$.

b. À partir de cette question on peut admettre que $F = \mathrm{Ker}\,\varphi$.
 (i) Montrer que $G \cap F = \{0\}$.
 (ii) À l'aide des questions précédentes, montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

c. On note $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la projection sur $F = \mathrm{Ker}\,\varphi$ parallèlement à G.
 (i) Calculer $\varphi(v)$.
 (ii) Soit $u = (x, y, z)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Déterminer en fonction de x, y, z le réel λ tel que $u - \lambda v \in \mathrm{Ker}\,\varphi$.
 (iii) Donner l'expression de $p(x, y, z)$ en fonction de (x, y, z).

3 Matrices

3.1 Calcul matriciel

Exercice 78. Calculer, s'ils existent, les produits AB et BA dans les cas suivants :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix};$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 79. Calculer le rang des matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 6 \\ -5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix},$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ a & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 80. Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont inversibles ?
(On pourra calculer le rang, utiliser le déterminant...)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ -3 & -5 & -2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -5 & 14 & 6 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -2 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas où les matrices sont inversibles, déterminer leur inverse à l'aide du pivot de Gauss.

Exercice 81. On considère les vecteurs :

$$u_1 = (1,2,1,-1),\ u_2 = (1,1,2,0),\ u_3 = (0,1,-1,-1),\ u_4 = (1,0,1,-3).$$

Quel est le rang de cette famille de vecteurs ?
Donner une famille libre de vecteurs extraite de (u_1, u_2, u_3, u_4).

Exercice 82. On considère les vecteurs :

$$u_1 = (1,2,0,1),\ u_2 = (0,0,2,2),\ u_3 = (2,4,2,4),\ u_4 = (3,6,0,3).$$

Quel est le rang de cette famille de vecteurs ?
Donner une famille libre de vecteurs extraite de (u_1, u_2, u_3, u_4).

Exercice 83. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a. Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$.

b. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 84. On considère la matrice identité $I \in M_3(\mathbb{R})$ et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2 en fonction de A et I.
En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 85. Calculer le déterminant des matrices suivantes. En déduire lesquelles sont inversibles.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & b \\ c & a & a \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 86. On considère les matrices A et P suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 9 \\ -3 & 4 & -9 \\ -3 & 3 & -8 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Démontrer que la matrice P est inversible et calculer P^{-1}.
b. On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D.
c. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, calculer D^n.
d. En déduire A^n pour tout n.

Annales

Exercice 87. (Partiel, 2008) On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 88. (Partiel n° 5, 2013)
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -5 \\ -5 & 4 & -5 \\ 5 & -5 & -6 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que $A^2 - 3A = 4I_3$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.
b. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

Exercice 89. (Partiel n° 5, 2013)
Déterminer le rang de la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.2 Applications linéaires

Exercice 90. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a. Si $u = (x, y, z)$, calculer $f(u)$.
b. Soient $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 1, 1)$, $v_3 = (2, 0, 1)$.
Montrer que la famille $\mathcal{U} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
c. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{U}$. (On calculera $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$.)

Exercice 91. Soit f l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5, x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5).$$

a. Calculer le rang de f et la dimension de $\operatorname{Ker} f$.
b. Déterminer la matrice de f par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^5$ et $\mathbb{R}^2$.
c. Déterminer $\operatorname{Ker} f$.

Exercice 92. Soit (e_1, e_2, e_3) une base de E et f un endomomorphisme de E caractérisé par :

$$f(e_1) = e_1 + e_2 - e_3, \quad f(e_2) = e_1 + e_2 + 2e_3, \quad f(e_1) = 2e_1 + 2e_2 + 3e_3.$$

a. Écrire la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3).
b. En déduire $f(u)$ où $u = (x, y, z)$.
c. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Exercice 93. Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On considère l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_1 + e_2 + e_3 + e_4, \\ f(e_2) &= e_1 - e_2 + e_3 - e_4, \\ f(e_3) &= -e_1 + e_2 - e_3 + e_4, \\ f(e_4) &= e_1 + e_2 - e_3 - e_4. \end{aligned}$$

a. Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{E}$.
Calculer $f(x, y, z, t)$.
b. f est-elle injective, surjective ?
c. Montrer que $v_1 = e_2 + e_3$ est une base de $\operatorname{Ker} f$. En déduire $\dim \operatorname{Im} f$.
Montrer que $f(e_1), f(e_3), f(e_4)$ est une base de $\operatorname{Im} f$.
d. Montrer que $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.
e. Montrer que les vecteurs $v_2 = f(e_1)$, $v_3 = f(e_3)$, $v_4 = f(e_4)$ forment une base de $\operatorname{Im} f$.
f. Montrer que $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{V}$.

Exercice 94. On pose $E = \mathbb{R}^4$. Soit f l'application linéaire de E dans E dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{E}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & -6 \\ 1 & -2 & 7 & -6 \\ 1 & -2 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer le rang de la matrice A.

b. On pose $u_1 = (1,1,1,1)$ et $u_3 = (1,0,-1,-1)$
Calculer $f(u_1)$ et $f(u_3)$.
Montrer que u_1 et u_3 forment une base de $\operatorname{Ker} f$.

c. Soit $F = \{u \in E, f(u) = 2u\}$.
(i) Sans déterminer F, montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
(ii) Déterminer F. On en donnera une base.

d. On pose $u_2 = (2,1,1,1)$ et $u_4 = (1,2,1,0)$.
(i) Montrer que la famille $\mathcal{U}= (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de E.
On expliquera la méthode choisie pour cette démonstration.
(ii) Calculer $f(u_2)$ et $f(u_4)$. En déduire que $u_2 \in \operatorname{Im} f$ et $u_4 \in \operatorname{Im} f$.
En déduire que (u_2, u_4) est une base de $\operatorname{Im} f$.
(iii) Déterminer la matrice B de f dans la base $\mathcal{U}$.

Exercice 95. On pose $E = \mathbb{R}^4$. Soit f l'application linéaire de E dans E dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{E}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & 5 & -11 \\ -1 & 3 & 4 & -7 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer le rang de la matrice A. L'application linéaire f est-elle injective, surjective, bijective ? Justifier vos réponses.

b. On pose $u_1 = (1,0,2,1)$ et $u_2 = (0,1,1,1)$. Calculer $f(u_1)$ et $f(u_2)$. Que peut-on en déduire ? Donner une base de $\operatorname{Ker} f$.

c. On pose $u_3 = (1,1,-1,0)$ et $u_4 = (0,2,1,1)$.
(i) Montrer que la famille $\mathcal{U}= (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de E.
On expliquera la méthode choisie pour cette démonstration.
(ii) Calculer $f(u_3)$ et $f(u_4)$. En déduire que $u_3 \in \operatorname{Im} f$ et $u_4 \in \operatorname{Im} f$.
En déduire que (u_3, u_4) est une base de $\operatorname{Im} f$.
(iii) Déterminer la matrice B de f dans la base $\mathcal{U}$.

Exercice 96. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 7 & -7 \\ 1 & 5 & -7 & 13 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer le rang de A.

b. L'application linéaire f est-elle injective, surjective, bijective ?
Justifier vos réponses.

c. Que peut-on dire de $\operatorname{Im} f$ et de $\operatorname{Ker} f$?
On donnera la dimension de $\operatorname{Im} f$ et de $\operatorname{Ker} f$.

Exercice 97. On considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donné par la matrice suivante dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 9 & -8 \\ 2 & -3 & 3 \\ 5 & -9 & 8 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que les vecteurs suivants forment une base de $\mathbb{R}^3$:

$$u_1 = (3,-1,-3), \quad u_2 = (1,0,-1), \quad u_3 = (0,-1,1).$$

b. Écrire la matrice B de f dans la base (u_1, u_2, u_3).

c. Calculer B^2 et B^3.

d. Montrer qu'on a $A^n = 0$ pour tout $n \geq 3$.

Exercice 98. On considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donné par

$$f(x,y,z) = (4x + 4y + z, -3x - 3y - z, -3x - 4y).$$

On admet que les vecteurs suivants forment une base de $\mathbb{R}^3$:

$$u_1 = (-3,2,1), \quad u_2 = (-2,1,1), \quad u_3 = (-3,2,2).$$

a. Écrire la matrice A de f dans la base canonique.

b. Écrire la matrice B de f dans la base (u_1, u_2, u_3).

c. Calculer B^2. Que peut-on en déduire pour A^2 ?

d. L'endomorphisme f est-il bijectif ?

e. Sans nouveau calcul, donner l'expression de A^n pour tout n.
On pourra distinguer deux cas.

Annales

Exercice 99. (Partiel, 2003)
On considère l'application f définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y,z) = (x - 15y - 9z, -2x - 6y - 6z, 3x + 15y + 13z).$$

a. Montrer que f est une application linéaire.
b. Écrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
c. Calculer $\det A$. En déduire que $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$ et que $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{R}^3$.
d. Montrer de deux façons différentes que $f \circ f = 4f$. En déduire que si $v \in \operatorname{Im} f$ alors $f(v) = 4v$.
e. Montrer que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.
En déduire que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
f. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est diagonale avec soit des 0 soit des 4 sur la diagonale.

Exercice 100. (Examen, Session 1, 2011) Soit $E = \mathbb{R}^3$. On pose, pour tout $u = (x,y,z) \in E$:

$$f(u) = (x + z, 2x - y + z, -x + y - z).$$

a. (i) Montrer que f est une application linéaire de E dans E.
(ii) On pose $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, et $e_3 = (0,0,1)$. Quelle est la matrice de f dans la base $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$?
b. Montrer que l'application f est bijective. (On justifiera le résultat et on expliquera la méthode choisie.)
c. Donner une expression de $f^{-1}(a,b,c)$.

3.3 Changement de base

Exercice 101. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a. Calculer $f(x,y,z,t)$ pour tout $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.
b. On considère les vecteurs :

$$e'_1 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4, \quad e'_2 = e_1 + e_2 - e_3 - e_4,$$
$$e'_3 = e_1 - e_2 + e_3 - e_4, \quad e'_4 = e_1 - e_2 - e_3 + e_4.$$

(i) Écrire la matrice de passage P de la base canonique vers $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$.
(ii) Calculer P^2 et en déduire P^{-1}.
(iii) Montrer que $\mathcal{E}'$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
c. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{E}'$.
d. En déduire $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Exercice 102. On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x + y, 2x - y + z, x + z)$.

a. Écrire la matrice M de cette application linéaire dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
b. Calculer $f(1,2,3)$ de deux manières : en utilisant la définition ou en utilisant la matrice.
c. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.
d. Soient $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (1,2,1)$, $v_3 = (2,0,1)$. Montrer que la famille $\mathcal{U} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
e. Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$ en fonction des vecteurs de $\mathcal{U}$.
f. Écrire la matrice B de f dans la base $\mathcal{U}$.
g. Retrouver cette matrice en utilisant les formules de changement de base.

Exercice 103.

a. Soient $u_1 = (4,3,-2)$, $u_2 = (4,0,-1)$, $u_3 = (2,1,0)$. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice de passage de la base canonique (e_1, e_2, e_3) à (u_1, u_2, u_3) ainsi que la matrice de passage de (u_1, u_2, u_3) à la base canonique.
b. Soient $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (1,-1,0)$, $u_3 = (1,1,1)$ et $v_1 = (0,1,1)$, $v_2 = (1,0,1)$, $u_3 = (1,1,0)$. Montrer que (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) sont des bases de $\mathbb{R}^3$. Donner les matrices de passage d'une base à l'autre.

Exercice 104. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ et soit (e_1, e_2, e_3) une base de E. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que A est inversible (sans calculer A^{-1}).
Calculer A^2 et en déduire A^{-1}.

b. On considère la famille (v_1, v_2, v_3) avec $v_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $v_2 = e_1 - e_2$, $v_3 = e_2 + e_3$.

(i) Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de E.

(ii) Déterminer la matrice de passage P de la base (e_1, e_2, e_3) à la base (v_1, v_2, v_3) .

(iii) Déterminer la matrice de l'endomorphisme f dans la base (v_1, v_2, v_3)

c. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 105. Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère : $v_1 = 2e_1 + 3e_2$, $v_2 = -e_1 - e_2 + e_3$ et $v_3 = 2e_1 + 2e_2 + e_3$.

a. Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Quelle est la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{B}$?

c. Quelle est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{E}$?

d. Soient $w = e_1 + 4e_2 - 3e_3$. Quelles sont les coordonnées de w dans la base $\mathcal{E}$? dans la base $\mathcal{B}$?

e. Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ déterminé par

$$\varphi(v_1) = 2v_1, \quad \varphi(v_1) = 0, \quad \varphi(v_1) = -v_1.$$

Quelle est la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$? dans la base $\mathcal{E}$?
Quel est le rang de φ ?

Exercice 106. On note $\mathcal{B}_{can} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ donné par l'expression

$$f(x, y, z, t) = (3x + 3y + 6z - 3t, x - 2y + 3z + 2t, -x - y - 2z + t, x - 4y + 3z + 4t).$$

a. Calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$ et $f(e_4)$. Écrire la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}_{can}$.

b. Calculer $\det A$. L'endomorphisme f est-il bijectif ?

c. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ est une droite (c'est à dire un espace vectoriel de dimension 1) et déterminer un vecteur u_1 qui engendre $\operatorname{Ker} f$.

d. On pose $u_2 = (-2, -2, 1, -2)$, $u_3 = (-3, 0, 1, 0)$ et $u_4 = (-3, 1, 1, 2)$.
Montrer que $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

e. Calculer la matrice B de f dans la base $\mathcal{C}$, sans utiliser la formule de changement de base.

f. Ecrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}_{can}$ à $\mathcal{C}$. Calculer son inverse P^{-1}.

g. Rappeler la formule de changement de base permettant d'exprimer B en fonction de A et P. à l'aide de la formule, vérifier le calcul de la question 5.

h. On pose $g = f \circ f$.

(i) Montrer sans calcul que $u_1 \in \operatorname{Ker} g$.

(ii) Calculer B^2. En déduire une base de $\operatorname{Ker} g$ et une base de $\operatorname{Im} g$.

Exercice 107. Soit $E = \mathbb{R}^4$. On pose, pour tout $u = (x, y, z, t) \in E$, $f(u) = (x + 2y, 2x + y, z + 2t, 2z + t)$.

a. (i) Montrer que f est une application linéaire de E dans E.

(ii) On pose $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ et $e_4 = (0, 0, 0, 1)$. Quelle est la matrice de f dans la base $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$?

b. L'application f est-elle bijective ? On justifiera le résultat et on expliquera la méthode choisie.

c. On pose $u_1 = (1, -1, 0, 0)$, $u_2 = (0, 0, 1, -1)$, $u_3 = (1, 1, 0, 0)$ et $u_4 = (0, 0, 1, 1)$.

(i) Montrer que le système $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de E.

(ii) Déterminer la matrice B de l'application f dans la base $\mathcal{U}$.

d. On désigne par P la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{U}$.

(i) Déterminer P.

(ii) Déterminer P^{-1}.

(iii) Quelle relation y-a-t-il entre les matrices A, B, P et P^{-1} ?

(iv) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 108. Soit f l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = (5x - y + 2z, -x + 5y + 2z, 2x + 2y + 2z).$$

a. Déterminer $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$.
Donner la matrice A de f dans la base canonique.

b. Calculer $\det A$. L'application f est-elle bijective ?
Déterminer $\operatorname{Ker} f$: on en donnera une base et on vérifiera que $\dim \operatorname{Ker} f = 1$.

c. Quelle est la dimension de $\operatorname{Im} f$? On pose $v_1 = (5, -1, 2)$ et $v_2 = (2, 2, 2)$. Montrer que v_1 et v_2 forment une base de $\operatorname{Im} f$.

d. On pose $u = (1, 1, -2)$, $v = (1, 1, 1)$, $w = (2, 0, 1)$.
Montrer que $\mathcal{U} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Donner la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{U}$. Calculer P^{-1}.
Calculer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{U}$.

Exercice 109. Soit $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ où $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$, $e_4 = (0,0,0,1)$. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a. Soit $x \in \mathbb{R}^4$ un vecteur dont les coordonnées dans la base $\mathcal{E}$ sont (x_1, x_2, x_3, x_4). En utilisant la matrice A, déterminer les coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{E}$.

b. Déterminer le rang r de f et la dimension de $\operatorname{Ker} f$.

c. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

d. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.

e. Donner une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$ et en déduire une base.

f. On considère la famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3, u_4) où :

$$u_1 = (2, 0, -1, 0), \quad u_2 = (0, 4, 1, 0),$$
$$u_3 = (3, 0, -1, 1), \quad u_4 = (2, 0, 1, 0).$$

(i) Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$, $f(u_3)$ et $f(u_4)$.

(ii) Montrer que $\mathcal{E}' = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ forme une base de $\mathbb{R}^4$.

(iii) Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{E}'$.

(iv) Donner la matrice A' de f dans la base $\mathcal{E}'$.

Annales

Exercice 110. (Examen, Session 2, 2012) On note $\mathcal{B}_{can} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ donné par sa matrice dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -2 \\ 1 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

a. Donner l'expression de $f(x, y, z, t)$ en fonction de x, y, z et t.

b. Calculer le déterminant de A. L'endomorphisme f est-il bijectif ?

c. On pose $u_1 = (0, 1, 0, -1)$.
Montrer que $Kerf$ est engendré par u_1 et déterminer le rang de f.

d. On pose $u_2 = (2, 3, 2, -6)$, $u_3 = (2, 0, 1, -2)$ et $u_4 = (1, -1, 0, 1)$.
Montrer que $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

e. Calculer la matrice B de f dans la base $\mathcal{C}$, sans utiliser la formule de changement de base.

f. Ecrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}_{can}$ à $\mathcal{C}$. Calculer son inverse P^{-1}.
Rappeler la formule permettant d'exprimer B en fonction de A et P.
On ne demande pas de vérifier la validité de la formule dans ce cas.

g. Calculer la matrice $B^2 - 2B + 1$.

h. Sans nouveau calcul, en déduire une base de $\operatorname{Ker}((f - id) \circ (f - id))$.

Exercice 111. (Examen, Session 1, 2013)
On pose $E = \mathbb{R}^4$. Soit f l'application linéaire de E dans E dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{E}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

a. Soit w le vecteur de coordonnées (x, y, z, t) dans la base $\mathcal{E}$. Calculer $f(w)$.

b. Calculer $\det A$. Que peut-on en déduire pour f ?

c. On pose $u_1 = (1, 1, 0, -1)$. Calculer $f(u_1)$. Que peut-on en déduire pour $\dim \operatorname{Ker} f$?

d. Déterminer le rang de la matrice A et une base de $\operatorname{Ker} f$.

e. Soit $F = \{u \in \mathbb{R}^4, f(u) = -u\}$.

(i) Sans déterminer F, montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(ii) Montrer que $F \subset \operatorname{Im} f$.

(iii) On pose $u_2 = (1, 1, 0, -2)$. Vérifier que $u_2 \in F$.

f. On pose $u_3 = (0, 0, 1, 0)$ et $u_4 = (-1, 0, 0, 1)$.

(i) Montrer que la famille $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de E. On expliquera la méthode choisie pour cette démonstration.

(ii) Calculer $f(u_3)$ et $f(u_4)$. En déduire que $u_3 \in \operatorname{Im} f$ et $u_4 \in \operatorname{Im} f$. En déduire que (u_2, u_3, u_4) est une base de $\operatorname{Im} f$.

(iii) Déterminer la matrice B de f dans la base $\mathcal{U}$.

g. Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{U}$.

(i) Écrire la matrice P et calculer P^{-1}.

(ii) Quelle relation lie les matrices A , B, P et P^{-1} ?

(iii) En déduire, en fonction de n, la matrice A^n.

Exercice 112. (Examen, Session 2, 2013)
On pose $E = \mathbb{R}^4$. Soit f l'application linéaire de E dans E dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{E}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

a. Soit w le vecteur de coordonnées (x, y, z, t) dans la base $\mathcal{E}$. Calculer $f(w)$.

b. Calculer $\det A$. Que peut-on en déduire pour f ?

c. On pose $u_1 = (2, 4, 2, 1)$ et $u_2 = (0, 1, 1, 0)$. Calculer $f(u_1)$ et $f(u_2)$.
Que peut-on en déduire pour $\dim \operatorname{Ker} f$?

d. Déterminer le rang de la matrice A.
Que peut-on en déduire pour $\dim \operatorname{Ker} f$?

e. On pose $u_3 = (0, 2, 3, 0)$ et $u_4 = (1, 2, 0, 1)$.
   (i) Montrer que la famille $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de E. On expliquera la méthode choisie pour cette démonstration.
   (ii) Déterminer la matrice B de f dans la base $\mathcal{U}$.

f. (i) Montrer que u_3 et u_4 appartiennent à $\operatorname{Im} f$.
   (ii) En déduire une base de $\operatorname{Im} f$.

g. Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{U}$.
   (i) Écrire la matrice P et calculer P^{-1}.
   (ii) Quelle relation lie les matrices A, B, P et P^{-1} ?
   (iii) En déduire, en fonction de n, la matrice A^n.

Deuxième partie

Analyse

1 Nombres réels et suites

1.1 L'ordre de $\mathbb{R}$

Exercice 1. Soit $S = \left\{ \dfrac{n+1}{2n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$.

a. Montrer que S est majoré et minoré.

b. Calculer $\sup S$ en justifiant la réponse.

c. L'ensemble S possède-t-il un plus grand élément ?

d. Calculer $\inf S$.

Exercice 2. Soit $A = \{a \in \mathbb{Q} \mid a^2 < 2\}$.

a. Pourver que A est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$.

b. Montrer que pour $r \in \mathbb{Q}$ on a $r^2 \neq 2$.

On suppose que A possède une borne supérieure a *dans* $\mathbb{Q}$.
On pose $4\epsilon = |a^2 - 2|$. D'après la question précédente, $\epsilon > 0$.

c. Montrer que $1 \leq a \leq 2$.

d. On suppose que $a^2 < 2$. Montrer que $a + \epsilon \in A$.

e. On suppose que $a^2 > 2$. Montrer que $a - \epsilon$ est un majorant de A

f. Conclure.

Exercice 3. Soit $u_n = n^{(-1)^n}$ et $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. L'ensemble A admet-il des bornes supérieure et inférieure ? Si oui, les calculer.

Exercice 4. Soit E l'ensemble des réels de la forme $\dfrac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
L'ensemble E admet-il une borne supérieure ? inférieure ? un plus petit élément ? un plus grand élément ?

Exercice 5. Soit A l'ensemble des nombres réels de la forme $\dfrac{2p^2 - 3q}{p^2 + q}$, où p et q sont des entiers vérifiant $0 < p < q$.

a. Montrer que A est borné par -3 et 2.

b. Déterminer $\inf(A)$ et $\sup(A)$.

Exercice 6. Soit $I = [0, 1]$. On veut montrer que toute application croissante $f : I \to I$ admet un point fixe. Pour cela on pose $A = \{x \in I \mid f(x) \leq x\}$. Démontrer les 4 propriétés suivantes :

a. $A \neq \emptyset$,

b. $x \in A \implies f(x) \in A$,

c. A admet une borne inférieure a et $a \in I$,

d. $f(a) = a$.

Conclure.

Exercice 7. On désigne par $E(x)$ la partie entière du réel $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire l'unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n + 1$.

a. Montrer que pour $x \leq y$ on a $E(x) \leq E(y)$.

b. Montrer que $E(x + y) - E(x) - E(y)$ ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1.

c. Montrer que si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ alors $E(-x) = -E(x) - 1$.

d. Tracer le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto E(x)$.

Annales

Exercice 8. (Partiel, 2009)

a. Soit A un ensemble de nombres réels. Rappeler les définitions de minorant de A et de borne inférieure de A.

b. Donner une caractérisation de la borne inférieure. (Plusieurs réponses possibles.)

c. Soit $A = \left\{ \frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$.
Déterminer si A admet des bornes inférieure et supérieure.

d. Soit A et B deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$ tels que $\forall a \in A \; \forall b \in B \;\; a \leq b$. Montrer que $\sup(A)$ et $\inf(B)$ existent et que $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Exercice 9. (Partiel n° 1, 2011) Posons $A = \left\{ \dfrac{2n+4}{6n+5} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$.

a. Montrer que A est une partie de $\mathbb{R}$ majorée et minorée.

b. Montrer que pour tout $n \geq 0$ on a
$$\frac{2n+4}{6n+5} = \frac{1}{3} + \frac{7}{18n+15}.$$

c. Montrer que A admet un plus grand élément, mais pas de plus petit élément.

d. Montrer que $\frac{1}{3}$ est la borne inférieure de A.

e. Quelle est la borne supérieure de A ?

Exercice 10. (Partiel n° 1, 2013)

a. Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et soit $M \in \mathbb{R}$.

(i) Rappeler la définition de « M est un majorant de A ».

(ii) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A possède une borne supérieure.

b. Soit $C = \{\frac{x^3}{x^2+1} \mid x \in \mathbb{R}\}$. Le sous-ensemble C a-t-il une borne supérieure ?

Exercice 11. (Partiel n° 1, 2013)
Considérons le sous-ensemble suivant de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ \frac{n-6}{2n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

a. Montrer que A est majoré et minoré.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\frac{n-6}{2n+1} = \frac{1}{2} - \frac{13}{4n+2}.$$

c. Montrer que A admet un plus petit élément mais pas de plus grand élément.

d. Déterminer $\sup(A)$ et $\inf(A)$.

1.2 Suites numériques

Exercice 12. Étudier la monotonie des suites suivantes :

$$a_n = (-2)^n, \quad b_n = n + (-1)^n, \quad c_n = \frac{n}{1+n}, \quad d_n = n^2 - 2n,$$
$$e_n = n(n+1)\cdots(2n-1)(2n), \quad f_n = n^n - n!, \quad g_n = n + 2\sin(n\pi/2).$$

Exercice 13. Étudier la convergence des suites suivantes :

$$a_n = \frac{2n^2 - 3n + 5}{3 - n^2}, \quad b_n = -3n^2 - n\sqrt{n} + n^2\ln(n), \quad c_n = \frac{\ln(n) + 3}{2 - n},$$
$$d_n = \frac{e^{2n} + 3n}{e^n - 5}, \quad e_n = \frac{n^2 - \ln(n)}{n\ln(n) - 1}, \quad f_n = \frac{n}{\ln(n)} - 3\sqrt{n},$$
$$g_n = n^{-2+(-1)^n}, \quad h_n = \frac{(-1)^n n + 1}{2n(-1)^n + 3}.$$

Exercice 14. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + (1/2)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que $u_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que la suite $(u_n)_n$ est croissante.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} - u_n \leq 1/2^n$, et en déduire que $u_n \leq 3$.

c. Montrer que $(u_n)_n$ converge et calculer sa limite, en utilisant $v_n = u_n^2$.

Exercice 15. Dans chacun des cas suivants, étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ et donner sa limite éventuelle :

a. $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = u_n - 1$,

b. $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

Exercice 16. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n}$. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 17. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f(x) = \dfrac{x+16}{x+7}$.

a. Vérifier que cette suite est bien définie.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 8}$. Trouver une relation entre v_{n+1} et v_n.

c. Déterminer v_n pour tout n.

d. En déduire que $(u_n)_n$ converger et calculer sa limite.

Exercice 18. On considère la suite de nombres réels $(u_n)_n$ définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in]0, +\infty[$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n^2 + 2)$.

a. Montrer que si la suite $(u_n)_n$ est convergente alors sa limite est égale à 1 ou 2.

b. Montrer que si $u_0 > 1$ alors $u_n > 1$ pour tout n.

c. Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(u_n - 1)(u_n - 2)$. En déduire que

(i) si $1 < u_n < 2$ alors $u_{n+1} < u_n$,

(ii) si $2 < u_n$ alors $u_n < u_{n+1}$.

d. On suppose que $1 < u_0 < 2$.
Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente et donner sa limite.

e. On suppose que $2 < u_0$.
Montrer que la suite $(u_n)_n$ est divergente et tend vers $+\infty$.

f. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_n$ lorsque $u_0 = 1$ ou $u_0 = 2$?

g. On suppose $0 < u_0 < 1$. La suite $(u_n)_n$ est-elle convergente ?

Exercice 19. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

a. Montrer que la suite $(w_n)_n$ définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite à termes positifs. Montrer que c'est une suite géométrique, dont on précisera la raison.
b. Déterminer la limite de la suite $(w_n)_n$.
c. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante et que la suite $(v_n)_n$ est décroissante.
d. Rappeler la définition des suites adjacentes.
e. Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ converge vers la même limite, que l'on notera l.
f. Soit $(t_n)_n$ la suite définie par $t_n = 3u_n + 8v_n$. Montrer que cette suite est constante.
g. Déterminer la valeur de l.

Exercice 20. On pose $S_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = S_{n-1} + \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2}$.
b. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = 1 - \frac{1}{n+1}$.
d. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S_n \leq 2 - \frac{1}{n+1}$.
e. Montrer que la suite $(S_n)_n$ est strictement croissante.
f. Montrer que la suite $(S_n)_n$ est convergente.

Annales

Exercice 21. (Partiel, 2009)
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$.

a. Montrer que $u_n \geq 0$ pour tout n.
b. Montrer que $(u_n)_n$ est une suite monotone.
c. Montrer que $(u_n)_n$ est une suite bornée.
d. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 22. (Partiel, 2011)
On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 3$, $v_0 = 4$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

a. On pose $w_n = v_n - u_n$ pour tout n.
Rappeler la définition d'une suite géométrique.
Montrer que la suite $(w_n)_n$ est une suite géométrique.
Que peut-on en déduire pour le signe de w_n et la limite de $(w_n)_n$?
b. Rappeler la définition des suites adjacentes.
c. Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
d. On pose $t_n = u_n + 2v_n$. Montrer que la suite $(t_n)_n$ est constante.
En déduire la limite des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.

Exercice 23. (Partiel n° 2, 2013)
Pour tout réel x on note $E(x)$ la partie entière de x, c'est-à-dire l'unique entier vérifiant les inégalités $x - 1 < E(x) \leq x$. On fixe un paramètre $\alpha > 0$. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les formules suivantes :

$$u_n = \frac{E(\sqrt{n})}{n+3}, \quad v_n = \frac{(E(\sqrt{n}))^2}{n+3}, \quad w_n = \frac{n - 2\sqrt{n} + 1}{n^\alpha + 3}.$$

a. Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.
b. (i) Lorsque $\alpha = 1$, montrer que la suite $(w_n)_n$ converge et calculer sa limite.
(ii) Pour quelles valeurs de α la suite $(w_n)_n$ converge-t-elle ?
c. Montrer que la suite $(v_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 24. (Partiel n° 2, 2013)
On considère les suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $x_0 = 2$, $y_0 = -1$ et les relations de récurrence :

$$(R) \quad x_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{2} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \frac{-x_n + 2y_n}{3}.$$

a. On pose $z_n = x_n + y_n$. Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n.
Que peut-on en déduire pour la suite $(z_n)_n$? Est-elle convergente ?
b. Exprimer $x_{n+1} - x_n$ en fonction de z_n.
En déduire que la suite $(x_n)_n$ est monotone.
c. Montrer par récurrence qu'on a $|x_n| \leq 2$ et $|y_n| \leq 2$ pour tout n.
d. À l'aide des questions précédentes, montrer que la suite $(x_n)_n$ converge.
e. *(Question hors-barême)*
(i) Trouver une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $(x_{n+1}, y_{n+1}) = f(x_n, y_n)$ pour tout n.
(ii) Résoudre le système $f(x, y) = (x, y)$.
(iii) Peut-on modifier les valeurs de x_0 et y_0 de manière à ce que les suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ définies par les relations (R) soient constantes et non nulles ?

2 Fonctions continues

2.1 Limites

Exercice 25. On note $E(x)$ la partie entière de x. Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{E(x)}{x}=1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x^2}{E(x)}=0.$$

Exercice 26. On note $E(x)$ la partie entière de x. Montrer que la fonction E n'a pas de limite en 0. Étudier la limite de $E(x^2)$ quand x tend vers 0.

Exercice 27.

a. Montrer que les fonctions sinus et cosinus n'ont pas de limite en $+\infty$.

b. Étudier l'existence des limites suivantes :

$$\lim_{x\to0^+}\sin\tfrac{1}{x},\quad \lim_{x\to+\infty}e^{-x}x^2\sin x,\quad \lim_{x\to0^+}\sqrt{1+x}\sin\tfrac{1}{x},$$
$$\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x},\quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\tfrac{1}{x}}\sin x-\cos\tfrac{1}{x}\sin x.$$

Exercice 28. Étudier si les limites suivantes existent. Lorsque c'est le cas, les calculer.

$$l=\lim_{x\to0}\frac{2x^2-3x+2}{2x^2-x+1},\quad m=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3x+2}{2x^2-x+1},\quad n=\lim_{x\to0}\frac{x^2+2x}{x+3},$$
$$o=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x}{x+3},\quad p=\lim_{x\to0}\frac{1+3x^2+x^3}{x+5x^2},\quad q=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+3x^2+x^3}{x+5x^2},$$
$$r=\lim_{x\to0}\frac{e^x-2x}{\sin x},\quad s=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2}}{x},$$
$$t=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{1-\cos(x)},\quad u=\lim_{x\to0}\frac{x}{1+\exp(\frac{1}{x})}.$$

2.2 Développements limités

Exercice 29. Déterminer le $DL_3(0)$ des fonctions suivantes :

$$f(x)=\sqrt{1+2x},\qquad g(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}},\qquad h(x)=\frac{x}{1+x^2},$$
$$i(x)=\cos(x),\qquad j(x)=\sin(2x^2).$$

Exercice 30. Donner le $DL_n(0)$ des fonctions suivantes :

$$f(x)=e^{(x^2)},\quad g(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 31. Calculer les $DL_3(0)$ de

$$f:x\mapsto\frac{e^x}{\sqrt{1+x}},\quad g:x\mapsto\cos x\sin x,$$
$$h:x\mapsto e^{-x}\cos(3x),\quad i:x\mapsto\ln(1+x)\ln(1-x).$$

Exercice 32. Calculer les $DL_5(0)$ de

$$f:x\mapsto\operatorname{ch}(x)\sin(x),\quad g:x\mapsto\sqrt{1-x^3}\ \sqrt[3]{1+x^2},$$
$$h:x\mapsto\frac{1+x}{1-x},\quad i:x\mapsto\frac{\sin x}{\exp x}.$$

Exercice 33. Étudier l'existence d'un développement limité au voisinage de 0 de $g:x\mapsto\dfrac{e^x-\sqrt{1+x}}{\sin x-\tan x}$.

Exercice 34. Calculer le $DL_4(1)$ des fonctions

$$f:x\mapsto\sqrt{x}\ \ln x\quad \text{et}\quad g:x\mapsto\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}.$$

Exercice 35. Calculer, lorsqu'ils existent :

a. les $DL_3(1)$ de $(\ln x)/x^2$ et $e^x\sqrt{x}$,

b. les $DL_2(\frac{1}{4})$ de $\ln x$ et $\cos(\pi x)$,

c. le $DL_3(3)$ de $\sqrt{x-3}$.

Exercice 36. Montrer qu'il existe des réels a, b, c, d et une fonction $\varphi:]1,+\infty[\to\mathbb{R}$ uniques tels que

$$\frac{x^3+1}{x^2-1}=ax+b+\frac{c}{x}+\frac{d}{x^2}+\frac{\varphi(x)}{x^2}\qquad\text{et}\qquad\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=0.$$

Donner la valeur de a, b, c et d.

Exercice 37. On se propose de calculer le $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto (1+x)^x$.

a. Effectuer le $DL_4(0)$ de $u(x) = x\ln(1+x)$ et vérifier que $\lim_{x\to 0} u(x) = 0$.

b. Calculer le $DL_4(0)$ de $u(x)^2$, $u(x)^3$ et $u(x)^4$.

c. Déduire de ce qui précède le $DL_4(0)$ de $f(x) = e^{u(x)}$.

d. Calculer le $DL_3(0)$ de $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 38. Calculer les $DL_4(0)$ de

$$f : x \mapsto e^{(e^x)}, \quad g : x \mapsto \ln(\cos x), \quad h : x \mapsto \sqrt{1-\sin(x)}.$$

Exercice 39. Calculer le $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$. *On utilisera le $DL_2(0)$ de $\frac{1}{1-u}$.* Quel est le $DL_5(0)$ de f ?

2.3 Calculs de limites

Exercice 40. Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

$$l = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x}, \quad m = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 3x}{\sin x}, \quad n = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\cos x},$$
$$o = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x^2 + x}, \quad p = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}, \quad q = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1+e^{1/x}},$$
$$r = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - x}{x}, \quad s = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(|x|^{x^2} - 1), \quad t = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos 2x}}{(\sin x)^2},$$
$$u = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{1-x^2}{\cos x}\right), \quad v = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos \frac{\pi}{2}x}.$$

Exercice 41. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ la quantité $\dfrac{(\sin x)^n}{\log(1+x^2)}$ admet-elle une limite finie quand x tend vers 0 ? Lorsque c'est le cas, déterminer cette limite.

Exercice 42. Déterminer les limites suivantes :

$$l = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^3 - 1}, \quad m = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\sin(x - \frac{\pi}{4})},$$
$$n = \lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{x^3 + x^2 - x - 1}, \quad o = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2+x} - \frac{x}{4} - \frac{3}{2}}{(x-2)^2}.$$

Exercice 43. Déterminer la limite de $f(x) = \dfrac{2}{(\cos x)^2} + \dfrac{1}{\ln(\sin x)}$ quand x tend vers $\dfrac{\pi}{2}$. *On réduira au même dénominateur après avoir posé $u = x - \frac{\pi}{2}$.*

Annales

Exercice 44. (Partiel, 2003) *(Les questions 2 et 3 sont indépendantes.)*

a. Donner (sans justification) les développements limités des fonctions suivantes à l'ordre 4 en zéro :

$$\ln(1+x), \quad \sin x, \quad \cos x, \quad (1+x)^a \quad a \in \mathbb{R} \text{ fixé.}$$

b. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en zéro de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x - \cos x}.$$

c. Déterminer la limite lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{\sin x} - \sqrt{x}}{\sin\sqrt{x} - \sqrt{x}}.$$

Exercice 45. (Partiel n° 4, 2010)

On pose $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+1}}{\sin x}$ et $g(x) = \dfrac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x}$.
Déterminer les limites de $f(x)$ et $g(x)$ lorsque x tend vers 0.
Pour g on pourra faire un DL à l'ordre 3.

Exercice 46. (Partiel n° 3, 2013)

a. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application ; rappeler la définition de : « f admet un développement limité à l'ordre 2 au point 0 ».

b. Rappeler les développements limités à l'ordre 2 au point 0 des fonctions suivantes :

$$x \to \ln(1+x), \quad x \to \sin(x),$$
$$x \to \cos(x), \quad x \to e^{\frac{x}{2}}, \quad x \to \sqrt{1+x}.$$

c. Calculer le développement limité à l'ordre 2 au point 0 de la fonction

$$f : x \mapsto \sqrt{1+\sin(x)} - e^{\frac{x}{2}}.$$

Trouver le plus grand entier n tel que la limite l suivante existe et, pour cet entier, calculer l.

$$l = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin(x)} - e^{\frac{x}{2}}}{x^n}.$$

d. Soient a et b deux réels ; trouver la condition nécessaire et suffisante pour que la limite m suivante existe, et donner la valeur de m lorsqu'elle existe.

$$m = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax) - \sin(bx)}{1-\cos(x)}.$$

2.4 Continuité

Exercice 47. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$.

a. Montrer que f est bornée. Atteint-elle ses bornes ?

b. Peut-on prolonger f par continuité à l'origine ?

Exercice 48. Étudier la continuité des fonctions suivantes :

— $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0; \end{cases}$

— $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0; \end{cases}$

— $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \sin x & \text{si } x \leq c \\ ax+b & \text{si } x > c. \end{cases}$

Pour la dernière fonction a, b, c sont des constantes données.

Exercice 49. Soient x, $y \in \mathbb{R}_+$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, avec $a < b$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $(x+y)f(c) = xf(a) + yf(b)$.

Exercice 50. On considère les équations

$$\begin{aligned} (E) \quad & 2^x - 5x = 0, \\ (F) \quad & x^7 - 3x - 1 = 0. \end{aligned}$$

Montrer que (E) admet au moins une solution dans l'intervalle $[0,1]$ et que (F) en admet au moins une dans $[1,2]$.

Annales

Exercice 51. (Partiel, 2006) Les réels a, b, α sont des paramètres. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \geq 1, \\ ax+b & \text{si } 0 < |x| < 1, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -e^{-\alpha x} & \text{si } x \leq -1. \end{cases}$$

a. Déterminer les intervalles de $\mathbb{R}$ où f est continue quels que soient les valeurs de a, b, α.

b. À quelle condition, nécessaire et suffisante, la fonction f est-elle continue à l'origine ?

c. (i) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1^+} f(x), \quad \lim_{x\to 1^-} f(x), \quad \lim_{x\to -1^+} f(x), \quad \lim_{x\to -1^+} f(x).$$

(ii) Déterminer α, a, b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$ entier.

Exercice 52. (Partiel, 2008)
On pose $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{e^x - 1}$ pour $x \in [-1,1]$, $x \neq 0$.
Peut-on prolonger f par continuité en 0 ?

Exercice 53. (Partiel, 2008) *(Les trois questions sont indépendantes.)*

a. Montrer que l'équation $(E)\ :\ x^2(\cos x)^n - x\sin x + 1 = 0$ admet au moins une racine dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 4$. Montrer qu'il existe $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tel que $f(c+\frac{1}{2}) - f(c) = 2$.

c. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a > 0$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b < 0$.
Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = 0$.

Exercice 54. (Partiel n° 3, 2009)
On fixe $a \in \mathbb{R}_+$ et on définie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+ax^2)}{x^2} & \text{si } x < 0, \\ 3(\cos x)^2(\sin x) + 3 & \text{si } x \in [0,\pi], \\ \dfrac{\sqrt[3]{1+x-\pi} - 1}{x-\pi} + b & \text{si } x > \pi. \end{cases}$$

a. Calculer $\lim_{x\to 0^-} f(x)$.

b. Calculer $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$ et en déduire $\lim_{x\to\pi^+} f(x)$.

c. Pour quelles valeurs de a et b la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 55. (Partiel n^o 4, 2009)

a. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

b. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue.
Montrer qu'il existe au moins un point $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 56. (Partiel n^o 4, 2010)
On pose $f(x) = \dfrac{e^{(x^2)} - \cos x}{x^2}$ pour $x \neq 0$. Peut-on prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 57. (Partiel n^o 4, 2011)

a. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

b. On considère l'équation $(E_n) : x^3 + (n^2+1)x + 2n + 1 = 0$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation (E_n) admet au moins une solution $x_n \in [-1,0]$.

Exercice 58. (Partiel n^o 4, 2011) Soit a un réel et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(0) = a$ et $f(x) = \frac{1}{x^3}\ln(1 + x + \frac{x^2}{2}) - \frac{1}{x^2}$ pour $x \neq 0$.

a. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b. Peut-on choisir a pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 59. (Partiel n^o 4, 2013)

a. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

b. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation (E_n) suivante, d'inconnue x, admet au moins une solution x_n dans l'intervalle $[0,n]$:

$$(E_n) \qquad n^2 \ln\left(2 - \frac{x}{n}\right) = x.$$

On vérifiera soigneusement les hypothèses du théorème.

c. *(Question hors-barême)*
Pour tout n on choisit une solution x_n de (E_n) dans $[0,n]$. Est-il possible que la suite $(x_n)_n$ soit bornée ?
En supposant $(x_n)_n$ bornée, on pourra déterminer la limite de $\ln\left(2 - \frac{x_n}{n}\right)$.

3 Dérivation

3.1 Recherche de dérivées

Exercice 60. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}} & \text{si } x \leq 0 \\ \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| & \text{si } x \in]0,1[\cap]1,+\infty[. \end{cases}$$

a. La fonction f est-elle continue en 0 ?

b. Montrer que $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\ln(1-x)}{x} - \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ pour tout $x \in]0,1[$.

c. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

d. Dresser le tableau de variation de f et préciser les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

Exercice 61. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt{-\ln x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

a. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

b. Montrer que pour tout $x \in]0,1[$ on a $-\ln x > 1 - x$ et étudier la dérivabilité de f en 1.

c. Dresser le tableau de variation de f et donner l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 62. On pose $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$.

Montrer que f peut être prolongée par continuité sur $\mathbb{R}$ en une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 63.
On considère la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(0) = 0$, et

$$f(x) = \tfrac{1}{x}(\ln(1+x) - x - \tfrac{1}{2}x^2) \quad \text{pour } x \neq 0.$$

a. Montrer que f est continue sur $]-1,+\infty[$.

b. La fonction f est-elle dérivable sur $]-1,+\infty[$? Déterminer $f'(0)$.

c. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$?

Exercice 64. On pose $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1+x}{1+x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 1 - \ln(1 - \frac{1}{2}x) & \text{si } x < 0. \end{cases}$

a. Déterminer le domaine de définition D de f.

b. Montrer que f est continue sur D.
Peut-on prolonger la fonction f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$?

c. La fonction obtenue est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

d. Donner l'équation de la tangente en 0 à la courbe représentative de f.

Annales

Exercice 65. (Partiel, 2006)

On définit les fonctions f_1, f_2 en posant $f_1(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ et $f_2(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$.

a. Déterminer les domaines de définition de f_1 et f_2.

b. Rappeler la définition de la dérivée d'une fonction f en un point x_0.

c. Écrire le rapport de dérivation au point $x_0 = 0$ pour les fonctions $x \mapsto \sqrt{1+x}$ et $x \mapsto \sqrt{1-x}$.

d. Déterminer les limites de $f_1(x)$ et $f_2(x)$ lorsque x tend vers 0.

e. Montrer qu'on peut prolonger f_1 et f_2 par continuité à l'origine.

Exercice 66. (Partiel, 2007) Soit a, b des paramètres réels et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x > 0 \\ (x+a)^2 + 2(x+a) + b & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

a. Calculer $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

b. Quelle relation doivent vérifier a et b pour que f soit continue en 0 ?

c. On suppose désormais que f est continue à l'origine.

(i) Calculer $f'_g(0)$ et $f'_d(0)$.

(ii) Peut-on choisir a et b pour que f soit dérivable en 0 ?

Exercice 67. (Partiel n° 4, 2013)
On définit une fonction $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ en posant $f(0) = 1$ et

$$f(x) = \frac{\sin x}{\ln(1+x)} \quad \text{pour } x \neq 0.$$

a. Justifier la dérivabilité de f sur $]-1,0[$ et $]0,1[$. Calculer f' sur $]-1,0[$ et $]0,1[$.

b. Montrer que f est continue en 0.

c. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

d. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $]-1,1[$?

Pour les questions 2, 3 et 4 on pourra utiliser des DL à l'ordre 2.

3.2 Accroissements finis

Exercice 68.

a. Énoncer le théorème de Rolle.

b. En utilisant ce théorème, montrer que l'équation $3x^5 + 15x - 1 = 0$ admet une unique racine réelle.

Exercice 69. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$, $f(1) = -1$ et $f(2) = 1$. Montrer qu'il existe $c \in]0,2[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 70. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$.

a. Montrer que $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \geq 1$.

b. Montrer que pour tous a, $b \geq 1$ on a $|f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|b-a|$.

c. Vérifier que $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ et déduire de la question précédente que $|f(x) - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|x - \sqrt{2}|$ pour tout $x \geq 1$.

d. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

(i) Montrer par récurrence qu'on a $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout n.

(ii) Montrer par récurrence qu'on a $|u_n - \sqrt{2}| \leq 2^{-n}$ pour tout n.

(iii) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
Expliquer comment calculer une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-6} près en utilisant la suite $(u_n)_n$.

Exercice 71. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Étudier la fonction f et en déduire que $f([0,1]) \subset [0,1]$.

b. Étudier la fonction f' et en déduire que $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$ pour $x \in [0,1]$.

c. Montrer qu'on a $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4}|x-y|$ pour tous x, $y \in [0,1]$.

d. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in [0,1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

e. Montrer qu'on a $|u_n - \alpha| \leq 4^{-n}$ pour tout n. La suite $(u_n)_n$ converge-t-elle ?
Trouver un entier N pour lequel $|u_N - \alpha| \leq 10^{-4}$.

Exercice 72. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 et a un réel fixé. Déterminer les limites suivantes en fonction des dérivées de f en a :

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+t)-f(a)}{t}, \quad \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t)-f(a-t)}{t}, \quad \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t)+f(a-t)-2f(a)}{t^2},$$
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+3t)-3f(a+2t)+3f(a+t)-f(a)}{t^3}.$$

Application : déterminer $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t^2}(\sqrt{2+t}+\sqrt{2-t}-2\sqrt{2})$.

Exercice 73. Soit $a > 0$ et $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = f(a) = 0$ et $f'(0) = 0$.

a. Exemple : $a = 2\pi$ et $f(x) = 1-\cos x$. Tracer l'allure du graphe de f sur $[0, 2\pi]$. Discuter graphiquement l'existence de points $(x, f(x))$ en lesquels la tangente au graphe de f passe par l'origine.

b. Montrer que la dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ s'annule sur $]0, a[$.
Montrer qu'il existe au moins 2 points du graphe de f sur $[0, a]$ en lesquels la tangente passe par l'origine.

Exercice 74. On considère les fonctions

$$f : x \mapsto \frac{1}{1-x}, \quad g : x \mapsto \frac{1}{1+x} \quad \text{et} \quad h : x \mapsto \frac{1}{1-x^2}.$$

Calculer par récurrence la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. En déduire celles de g puis h. Retrouver le développement de Taylor de f à tout ordre.

Exercice 75. Calculer le $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto \sqrt{\cos(x)}$. En déduire la valeur de $f^{(4)}(0)$. Essayer de retrouver cette valeur en calculant $f^{(4)}(x)$ pour tout x.

Exercice 76. On pose $f(x) = e^x \ln(x)$ pour $x > 0$.

a. Calculer le DL_4 de f en 1.

b. En déduire la valeur de $f^{(4)}(1)$.

Exercice 77. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = \cos x + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$.

a. Quel théorème permet de déduire l'existence de DL_n de l'existence de dérivées $n^{\text{ièmes}}$?

b. Montrer que si une fonction admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0, alors elle est dérivable en 0.

c. Montrer que f admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0, mais n'est pas dérivable deux fois en 0.

Annales

Exercice 78. (Partiel, 2011)
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on définit une fonction $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ en posant

$$f_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1) - \ln x.$$

a. On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$.
  (i) Rappeler la formule exprimant $\frac{y^n-1}{y-1}$ comme polynôme pour tout $y \neq 1$.
  (ii) Montrer que $y - 1 \leq \frac{1}{n}(y^n - 1)$ pour tout $y \geq 1$.

b. On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$.
  (i) Calculer et factoriser $f_n'(x)$, pour tout $x > 0$.
  (ii) Monter que pour tout $x \geq 1$ on a $|f_n'(x)| \leq \frac{x-1}{n}$.
  (iii) En déduire qu'on a $|f_n(x)| \leq \frac{(x-1)^2}{n}$ pour tout $x \geq 1$.
  (On notera que $f_n(1) = 0$.)

c. On fixe un réel $x \geq 1$.
  (i) Déterminer $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{x} - 1)$.
  (ii) Montrer que $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) = \ln x$.
  Ce résultat est-il encore valable pour $x \in]0, 1[$? *(On pourra poser $y = 1/x$.)*

Exercice 79. (Partiel n° 5, 2013)
On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{1+x}$.

a. Calculer l'unique réel positif $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

b. Montrer qu'on a $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

c. Énoncer le théorème des accroissements finis.

d. À l'aide des questions précédentes, montrer que $|f(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

e. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.
Vérifier que $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que $|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En déduire que $\lim_{n\to\infty} u_n = \alpha$.

3.3 Études de fonctions

Exercice 80. On se propose d'étudier le graphe de la fonction

$$f : x \mapsto x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right).$$

a. Déterminer le domaine de définition de f et étudier sa continuité.
b. Calculer la dérivée f' et l'écrire sous la forme $f'(x) = xv(x)$.
c. Étudier les variations de $v(x)$. En déduire le signe de $f'(x)$ en fonction de x.
d. Effectuer un développement limité de $u \mapsto uf(\frac{1}{u})$ à l'ordre 1 en 0.
(On admettra que $\arctan(t) = t + t^2\epsilon(t)$ *avec* $\lim_0 \epsilon = 0$.*)*
En déduire que le graphe de f admet une asymptote D en $+\infty$ et $-\infty$ dont on précisera l'équation.
e. Montrer que le graphe de f coupe D en un unique point d'abscisse x_0, et que $x_0 \in [-2, -1]$. Pour cela on pourra étudier la fonction g définie par

$$g(x) = \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) + \frac{1-x}{x^2}.$$

f. Calculer $f(0)$ et $f(-2)$. Construire le graphe de f.

Exercice 81. Représenter l'allure du graphe de $f : x \mapsto e^{1/x}\sqrt{x(x+1)}$ et étudier l'existence d'asymptotes.

Annales

Exercice 82. (Partiel, 2011)
On considère la fonction f définie par la formule $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-x^4}}{x}$.

a. Déterminer l'ensemble de définition D de f et vérifier que f est impaire.
Montrer qu'on peut étendre f par continuité à $[-1, 1]$: on notera encore f cette extension.
b. Étudier la dérivabilité de f sur D. On étudiera notamment l'existence de demi-tangentes en -1 et 1.
c. En multipliant l'expression de f par $1 + \sqrt{1-x^4}$ en haut et en bas, montrer que f est dérivable sur $]-1, 1[$. Calculer la dérivée correspondante.
d. Établir le tableau de variations de f et représenter l'allure de son gaphe.

Exercice 83. (Partiel n° 5, 2013)
On définit une fonction f sur l'ensemble $D =]-1, 0[\cap]0, +\infty[$ en posant $f(0) = 1$ et

$$f(t) = \frac{\ln(1+t)}{t}.$$

a. Montrer que f est continue en 0.
b. Justifier que f est dérivable sur D et calculer $f'(t)$ pour $t \neq 0$, $t \in D$.
On mettra $f'(t)$ sous la forme $f'(t) = \frac{1}{t^2} \times h(t)$.
c. Calculer $h'(t)$ et en déduire le signe de $h'(t)$ pour $t \in D$.
En déduire que h est négative sur D.
d. En déduire le tableau de variation de f.
e. Étudier les limites aux bornes de f.
Que peut-on en déduire pour le graphe de f ?
f. Montrer que f est dérivable en 0. On précisera la valeur de $f'(0)$ ainsi que l'équation de la tangente en 0.
g. Dessiner l'allure du graphe de f. On fera figurer les éventuelles asymptotes et la tangente en 0.

Exercice 84. (Examen, Session 1, 2013)
On considère la fonction f définie par la formule $f(x) = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$.

a. Quel est le domaine de définition D de f ?
Justifier la continuité de f sur D et déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
b. (i) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
(ii) Pour $x \geq 0$, classer dans l'ordre les trois réels 1, $e^{\sqrt{x}}$ et $e^{-\sqrt{x}}$.
(iii) Déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
c. (i) Rappeler le développement limité de e^t à l'ordre 2 en 0.
(ii) Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.
(iii) Donner l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0.
(iv) La fonction f est-elle de classe C^1 sur D ?

Exercice 85. (Examen, Session 2, 2013)
On considère la fonction f définie par la formule $f(x) = \ln(1+\sqrt{x}) + \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$.

a. Quel est le domaine de définition D de f ?
Justifier la continuité de f sur D et déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
b. (i) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
(ii) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $f'(x) < \frac{1}{2}$.
(iii) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $f(x) < 1 + \frac{x}{2}$. *On appliquera le théorème des accroissements finis entre* 0 *et* x*, après avoir soigneusement vérifié les hypothèses.*
c. (i) Rappeler le développement limité de $\ln(1+t)$ et $\frac{1}{1+t}$ à l'ordre 2 en 0.
(ii) Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.
d. (i) Donner l'équation de la tangente (T) au graphe de f au point d'abscisse 0.
(ii) Quelle est la position du graphe de f sur $\mathbb{R}_+^*$ par rapport à la droite (T) ?

4 Intégration

4.1 Sommes de Riemann

Exercice 86. Déterminer les limites des suites ci-dessous lorsque n tend vers $+\infty$:

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2}, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{k^2+n^2}, \quad C_n = \frac{1}{n}(1+\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{4}+\cdots\sqrt[n]{2^n}),$$

$$D_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}, \quad E_n = \frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{k=0}^{n-1} k^\alpha, \quad F_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2\cos\frac{k\pi}{n}.$$

Exercice 87. À l'aide des sommes de Riemann, calculer les intégales suivantes :

$$A = \int_0^1 t\mathrm{d}t, \quad B = \int_0^1 e^t\mathrm{d}t.$$

Exercice 88. On pose $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\sin\frac{k}{n}$ et $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n^2}\sin\frac{k}{n}$.

a. Montrer que $\lim_{n\to\infty} V_n = \sin 1 - \cos 1$.

b. On rappelle que $x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin x \leq x$ pour tout $x \geq 0$.

  (i) Trouver une suite (W_n) de limite nulle telle que $V_n - W_n \leq U_n \leq V_n$ pour tout n.

  (ii) Déterminer $\lim_{n\to\infty} U_n$.

4.2 Intégrales, primitives, équations différentielles

Exercice 89. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln x)}, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}\,x}, \quad I_3 = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t,$$

$$I_4 = \int_0^1 x^2e^x\mathrm{d}x, \quad I_5 = \int_1^2 (\ln x)^2\mathrm{d}x, \quad I_6 = \int_1^e x(\ln x)^2\mathrm{d}x,$$

$$I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(2x)\ \mathrm{d}x, \quad I_8 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(\sin x)^2}\mathrm{d}x, \quad I_9 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^3(\sin x)^3}{1+(\sin x)^2}\mathrm{d}x,$$

$$I_{10} = \int_0^1 \frac{e^x\mathrm{d}x}{10-3e^x}, \quad I_{11} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+9}.$$

Exercice 90. Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}, \quad f_2(x) = x^2\sqrt{1+x^3}, \quad f_3(x) = \frac{1+\ln x}{x\ln x}, \quad f_4(x) = \frac{x^2}{2+x^3},$$

$$f_5(x) = (x+1)e^x, \quad f_6(x) = e^x\sin x, \quad f_7(x) = \arctan x, \quad f_8(x) = x\cos 2x,$$

$$f_9(x) = \frac{x^2}{(x^2+1)^2}, \quad f_{10}(x) = \frac{x}{x^3-3x+2}, \quad f_{11}(x) = \frac{x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}},$$

$$f_{12}(x) = (x^2-x+3)\sin x, \quad f_{13}(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}, \quad f_{14}(x) = \frac{\sin 3x}{\sqrt{\cos x}}.$$

Exercice 91. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par la formule

$$f(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x+3)^2(x^2+1)}.$$

a. Déterminer les réels a, b, c, d tels que $f(x) = \dfrac{a}{(x+3)^2} + \dfrac{b}{x+3} + \dfrac{cx+d}{x^2+1}$.

b. Déterminer les primitives de f sur $]-3,+\infty[$.

Exercice 92. Résoudre les équations différentielles suivantes.
On donnera également la solution vérifiant la condition initiale $y(0) = 0$.

a. $y + 4y = 0$,

b. $2y' - 3y = 0$,

c. $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$,

d. $y' + y = e^x - 1$,

e. $y' + 2y = \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-2x}$,

f. $y' + 2y = \frac{2x-1}{x^2}$,

On commencera par résoudre les équations sans second membre.
Puis on utilisera la méthode de variation de la constante.

Exercice 93. Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $x^2y' - y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$,

b. $(x\ln x)y' - y = 0$ sur $]1,+\infty[$,

c. $y' - \frac{1}{x}y = x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$,

d. $y' - \frac{2}{x}y = x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$,

e. $(x+1)y' + xy = x^2 - x + 1$ sur $]-1,+\infty[$,
f. $y' - 2xy = -(2x-1)e^x$,
g. $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$ sur $]-1,+\infty[$.

On commencera par résoudre les équations sans second membre en calculant une primitive. Puis on utilisera la méthode de variation de la constante.

Exercice 94. Pour $x > 1$ on pose

$$g(x) = \frac{1+x}{x(1-x)}, \quad h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)}, \quad k(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x-1)^2}.$$

a. Déterminer les réels a, b tels que $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{1-x}$ pour tout $x > 1$.
En déduire une primitive de g sur $]1,+\infty[$.
b. À l'aide d'un changement de variable, déterminer une primitive de h.
On pourra utiliser l'identité $\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$.
c. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de k.
d. À l'aide des questions précédentes, résoudre sur $]1,+\infty[$ l'équation différentielle $2x(1-x)y' + (1+x)y = x$. On commencera par l'équation sans second membre.

Exercice 95.

a. Déterminer les fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) + f(x) = f(0) + f(1).$$

b. Déterminer les fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) + f(x) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

Annales

Exercice 96. (Examen, Session 1, 2010)

a. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x \arctan(x) \mathrm{d}x$.
b. Calculer $\displaystyle\int_1^4 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+t}$.
c. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2t}\mathrm{d}t}{1+e^t}$.
d. On pose $g(u) = \dfrac{1}{(u+1)(u+2)(u^2+4)}$ pour tout $u \in \mathbb{R}_+$.
(i) Déterminer les réels a, b, c, d tels que $g(u) = \dfrac{a}{u+1} + \dfrac{b}{u+2} + \dfrac{cu+d}{u^2+4}$.
(ii) Déterminer une primitive de la fonction $h : u \mapsto \dfrac{1}{u^2+4}$ sur $\mathbb{R}_+$.
(iii) En déduire une primitive de g sur $\mathbb{R}_+$.
(iv) Déterminer une primitive sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction

$$f : t \mapsto \frac{\sin t}{(1+\cos t)(2+\cos t)(5-(\sin t)^2)}.$$

Exercice 97. (Examen, Session 1, 2013)

a. À l'aide d'intégrations par parties, déterminer une primitive de la fonction

$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto t^2 e^{-t}.$$

b. À l'aide d'un changement de variables, déterminer une primitive de la fonction

$$g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x}\, e^{-\sqrt{x}}.$$

c. Résoudre l'équation différentielle $2\sqrt{x}\, y' - y = 0$, d'inconnue $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.
d. Résoudre l'équation différentielle $2\sqrt{x}\, y' - y = x$, d'inconnue $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.

Exercice 98. (Examen, Session 2, 2013)

a. Déterminer deux réels a, b tels que $\frac{1}{t(1+t)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{(1+t)}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$.
En déduire une primitive de la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $\quad t \mapsto \frac{1}{t(1+t)}$.
b. À l'aide d'intégrations par parties, déterminer une primitive de la fonction

$$g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}.$$

c. À l'aide d'un changement de variables, déterminer une primitive de la fonction

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{xe^x}{(1+e^x)^2}.$$

d. Résoudre l'équation différentielle $(1+e^x)y' - e^x y = 0$, d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
e. Résoudre l'équation différentielle $(1+e^x)y' - e^x y = xe^x$, d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

4.3 Propriétés des intégrales

Exercice 99. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^n x^n e^{-nx} \mathrm{d}x$.

a. Étudier la fonction $f : x \mapsto xe^{-x}$ sur $[0, n]$.
b. Majorer I_n et montrer que $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

Exercice 100. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{n \sin x}{n + x} \mathrm{d}x$.
En utilisant l'identité $\frac{n}{n+x} = 1 - \frac{x}{n+x}$, déterminer la limite de la suite (I_n).

Exercice 101. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \displaystyle\int_1^e x^2 (\ln x)^n \mathrm{d}x$.

a. Justifier l'existence de I_n pour tout n.
b. Déterminer le signe de I_n pour tout n.
c. Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.
d. La suite $(I_n)_n$ est-elle convergente ? Justifier.
e. (i) Donner une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $\varphi : x \mapsto (n+1)(\ln x)^n / x$.
   (ii) En utilisant l'identité $x^2 (\ln x)^n = \frac{x^3}{n+1}\varphi(x)$, montrer qu'on a $I_n \leq \frac{e^3}{n+1}$ pour tout n.
   (iii) Quelle est la limite de la suite $(I_n)_n$?

Exercice 102. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$I_n = \int_0^1 \sqrt{1 - x^n}\ dx.$$

a. Justifier l'existence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
b. Pour $a \in]0, 1[$ fixé, quel est le sens de variation de la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
   Montrer que la suite $(I_n)_n$ est monotone et préciser son sens de variation.
c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, 1]$ on a $\sqrt{1 - x^n} \leq 1$.
   En déduire que la suite $(I_n)_n$ converge.
d. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $I_n \geq \int_0^1 (1 - x^n) dx$.
   En déduire la limite de la suite $(I_n)_n$.

Exercice 103. Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer leurs dérivées :

$$f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} \mathrm{d}t, \quad g(x) = \int_x^{x+x^2} e^{\frac{1}{t}} \mathrm{d}t.$$

Exercice 104. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$\varphi(x) = \int_0^x (t - x) f(t) \mathrm{d}t.$$

Justifier l'existence de $\varphi(x)$ pour tout x. Étudier la dérivabilité de φ et déterminer φ' le cas échéant.

Exercice 105. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_{1-x}^{1+x} f(t) \mathrm{d}t$.

Exercice 106. On considère les fonctions f, $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1 + t^2} \mathrm{d}t, \quad g(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln t}{1 + t^2}\ dt.$$

a. Justifier l'existence de $f(x)$ et $g(x)$ pour tout $x > 0$.
b. Étudier les variations de f.
c. Déterminer $g'(x)$ pour tout $x > 0$, ainsi que $g(1)$.
   En déduire une expression de g sans intégrale.
d. En effectuant le changement de variable $t = \frac{1}{s}$, retrouver l'expression de g.

Exercice 107. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t} \mathrm{d}t$.

a. Déterminer la limite de φ en 0. *On pourra utiliser l'encadrement* $1 \leq e^t \leq 1+2t$ *valable pour* $t \in [0, 1]$.
b. Déterminer la limite de φ en $+\infty$.
c. Étudier les variations de φ.

Exercice 108. Pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $I(u) = \displaystyle\int_u^{2u} \frac{\sin x}{x^2}$ et $K(u) = \displaystyle\int_u^{2u} \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

a. Calculer $K(u)$ pour tout u.
b. Montrer qu'on a $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
c. En déduire que $|K(u) - I(u)| \leq \frac{u^2}{4}$ pour tout $u > 0$.
d. Montrer que $\lim_{u\to 0} I(u) = \ln 2$.

Exercice 109. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = e^{-t^2}$. On pose

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

a. Montrer que f est paire, dérivable, et étudier ses variations sur $\mathbb{R}$.
b. Justifier l'existence de $F(x)$ pour tout x et montrer que f est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ et impaire.
c. Déterminer $F'(x)$ pour tout x et les variations de F.
d. Montrer qu'on a $F(x) \leq xe^{-x^2}$ pour tout $x \geq 0$.
En déduire la limite de F en $+\infty$.
e. Représenter l'allure du graphe de F en précisant la tangente en 0.

Annales

Exercice 110. (Examen, Session 1, 2011)
On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{nx}\mathrm{d}x}{1+e^x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Justifier l'existence de I_n pour tout n.
b. Calculer I_1 et $I_0 + I_1$. En déduire la valeur de I_0
c. Montrer que la suite $(I_n)_n$ est positive et monotone.
d. Montrer qu'on a $2 \leq e^x + 1 \leq e + 1$ pour tout $x \in [0, 1]$.
En déduire un encadrement de I_n.
e. Déterminer les limites $\lim_{n\to\infty} I_n$, $\lim_{n\to\infty} e^{-n}I_n$.

Exercice 111. (Examen, Session 1, 2011)
On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = \ln 2$.

a. Justifier l'existence de $f(x)$ pour tout x.
b. À l'aide d'un changement de variable, montrer que f est paire.
c. (i) Calculer $\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.
(ii) Montrer que $f(x) = \ln 2 - \int_x^{2x} \frac{1-\cos t}{t}\mathrm{d}t$ pour tout $x \neq 0$.
(iii) Montrer qu'on a $0 \leq 1 - \cos t \leq \frac{t^2}{2}$ pour tout $t \geq 0$.
(iv) En déduire que $|f(x) - \ln 2| \leq \frac{3}{4}x^2$ pour tout $x \geq 0$.
(v) Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
d. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.
e. Étudier la dérivabilitté de f en 0 et déterminer $f'(0)$ s'il existe.
Que peut-on en déduire pour la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0 ?
f. (i) Montrer qu'on a $f(x) = \frac{\sin 2x}{2x} - \frac{\sin x}{x} + \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2}\mathrm{d}t$ pour tout $x > 0$.
(On pourra utiliser une intégration par parties.)
(ii) Montrer que $g(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2}$ tend vers 0 en $+\infty$.
(iii) En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction f.
g. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.
(On rappelle que $\cos(2x) = 2(\cos x)^2 - 1$.*)*
En déduire l'allure de la courbe représentative de f sur $[0, 2\pi]$ puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice 112. (Examen, Session 1, 2013)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$I_n = \int_0^1 (1 - \cos x)^n \, dx.$$

a. Justifier l'existence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
b. Tracer l'allure de la courbe d'équation $y = 1 - \cos x$ pour $x \in [0, \pi]$.
c. Déterminer le signe de I_n pour tout n. Montrer que la suite $(I_n)_n$ est monotone.
d. La suite $(I_n)_n$ converge-t-elle ? Justifier.
e. Montrer qu'on a $1 - \cos x \leq x$ pour tout $x \geq 0$.
On appliquera le théorème des accroissements finis entre 0 *et* x.
f. À l'aide de la question précédente, montrer qu'on a $I_n \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout n.
En déduire la limite de la suite $(I_n)_n$.

Exercice 113. (Examen, Session 2, 2013)
On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln(1+t^2)dt$.

a. Justifier l'existence de I_n et J_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
b. Que peut-on dire du signe de I_n et J_n ?
c. Étudier la monotonie des suites $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Ces suites convergent-elles ? *On justifiera la réponse.*
d. Montrer qu'on a $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
En déduire la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.
e. Montrer que $J_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1}I_{n+2}$. *On pourra utiliser une intégration par parties.*
f. En déduire que les suites $(J_n)_n$ et $(nJ_n)_n$ convergent et déterminer leurs limites.