Université de Caen
UFR Sciences
L2 Maths

1er semestre 2014-2015
Mathématiques
Analyse

Suites de fonctions

Exercice 1. Déterminer la limite simple de la suite des fonctions suivantes : $g(x) = 1$ *sur* $]-1,1]$, $g(-1) = 0$, $g(x) = x$ *sinon*

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1 + x^{2n+1}}{1 + x^{2n}}.$$

La limite est-elle uniforme ?

Exercice 2. Déterminer la limite simple de la suite des fonctions suivantes : $g(x) = x$

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{2x + n^2x^3}{1 + n^2x^2}.$$

La limite est-elle uniforme ? $\|f_n - g\| = 1/2n$

Exercice 3. On considère les fonctions

$$f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{nx}{1 + n^2x^2}.$$

a. Déterminer la limite simple g de la suite de fonctions $(f_n)_n$.
b. Montrer que pour tout n et tout $x > 0$ on a $|f_n(x)| \leq 1/nx$.
c. On fixe un réel $a > 0$. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers g sur $[a, +\infty[$.
d. La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément vers g sur $\mathbb{R}_+$? $f_n(1/n) = 1/2$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue, non identiquement nulle, telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Pour tout $x \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $f_n(x) = f(nx)$ et $g_n(x) = f(x/n)$.

a. Montrer que les suites de fonctions $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ convergent simplement vers la fonction nulle.
b. Les convergences de la question précédente sont-elles uniformes ?
Montrer qu'on a convergence uniforme sur tout intervalle de la forme $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$.
c. On suppose que $I = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge. Déterminer $\lim_{n\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ et $\lim_{n\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 5. On considère les fonctions

$$f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{n(x^3 + x)e^{-x}}{nx + 1}.$$

a. Déterminer la limite simple g de la suite $(f_n)_n$. $(x^2 + 1)e^{-x}$ *sauf* $g(0) = 0$
b. La convergence est-elle uniforme ?
c. Montrer que $f_n(x) - g(x) = g(x)/(nx + 1)$.
d. On fixe $A > 0$. Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément vers g sur l'intervalle $[A, +\infty[$.

Exercice 6. On considère les fonctions

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{1 + (x + n)^2}.$$

a. Déterminer la limite simple g de la suite de fonctions $(f_n)_n$.
b. Représenter les graphes de f_0, f_1, f_2. La convergence de la question précédente est-elle uniforme ?
c. Soit A un réel fixé. Montrer que la suite de fonction $(f_n)_n$ converge uniformément vers g sur l'intervalle $[A, +\infty[$.

Exercice 7. On considère la suite de fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_0(x) = 0$ et $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}(x - f_n(x)^2)$.

a. Montrer qu'on a $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$ pour tout $x \in [0,1]$.

b. Déterminer la limite simple r de la suite de fonctions $(f_n)_n$.

c. (i) Soit $\epsilon \in]0,1]$ fixé. Montrer que pour tout $x \in \left[0, \epsilon^2\right]$ et pour tout n on a $|f_n(x) - \sqrt{x}| \leq \epsilon$.

(ii) Montrer que pour tout $x \in \left[\epsilon^2, 1\right]$ on a $\sqrt{x} - f_{n+1}(x) \leq (1-\epsilon)(\sqrt{x} - f_n(x))$.

(iii) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1-\epsilon)^n \leq \epsilon$ pour tout $n \geq N$.

(iv) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers r.

d. Montrer que la fonction « racine carrée » est limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite de polynômes. Montrer qu'il existe une suite de polynômes qui converge uniformément vers la fonction « valeur absolue » sur $[-1,1]$.

Exercice 8. Pour tout $x > 1$ on pose

$$\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}, \quad f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \quad \text{et} \quad d_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} - \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}.$$

a. Justifier le fait que $\zeta(x)$ et $f(x)$ sont bien définies pour $x > 1$. Calculer $f(x)$. $f(x) = 1/(x-1)$
Montrer que la suite de fonction $(d_n)_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ vers une fonction d à déterminer.

b. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 1$ on a

$$0 \leq \frac{1}{k^x} - \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leq \frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x}.$$

En déduire un encadrement de $d(x) - d_n(x)$. $0 \leq d(x) - d_n(x) \leq (n+1)^{-x} \leq 1/(n+1)$

c. Montrer que la suite de fonctions $(d_n)_n$ converge uniformément vers d.

d. Soit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ les sommes partielles de la série harmonique.
On rappelle qu'il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
Montrer qu'on a $\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$ lorsque $x \to 1$. $d_n(1) = H_n - \ln(n+1) \to \gamma$

Exercice 9. On considère les fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto n^\alpha x(1-x)^n$, où $\alpha \in \mathbb{R}_+$ est un paramètre fixé.
On pose $I_n = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

a. Déterminer la limite simple g de la suite de fonctions $(f_n)_n$.

b. Dresser le tableau de variations de f_n sur $[0,1]$. *max en* $1/(n+1)$

c. Pour quelles valeurs de α la suite $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément vers g ? $\alpha < 1$

d. Montrer que $\lim I_n = 0$ lorsque $\alpha < 1$.
Montrer que $\lim I_n = 0$ lorsque $\alpha = 1$.

e. Montrer que $x^{\alpha-1} f_n(x)$ est bornée sur $[0,1]$.
En déduire que $\lim I_n = 0$ lorsque $\alpha < 2$.

f. Calculer I_n pour tout n. Pour quelles valeurs de α a-t-on $\lim I_n = 0$? $I_n = n^\alpha/(n+1)(n+2)$

Exercice 10. On considère les fonctions $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{n!} x^n e^{-x}$.

a. Déterminer la limite simple g de la suite de fonctions $(f_n)_n$.

b. Étudier la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$. *max en* n

c. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers g.

d. A-t-on $\lim_{n\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$?
Calculer $\lim_{n\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ pour tout n. On pourra procéder par récurrence. $I_n = 1$

Exercice 11. Déterminer les limites des suites suivantes en justifiant l'interversion :

$$I_n = \int_0^1 \sqrt{1+x^n}\mathrm{d}x, \quad J_n = \int_0^1 \frac{\cos(\frac{x}{n})}{1+x^n}\mathrm{d}x, \quad K_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^3}}\mathrm{d}x,$$

$$L_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x \; e^{-\frac{x}{n}}}{\sqrt{1+x^n}}\mathrm{d}x, \quad M_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{n}}}{1+x^2}\mathrm{d}x, \quad N_n = \int_0^{+\infty} \frac{(\sin x)^n}{x^2}\mathrm{d}x.$$