

SÉRIES DE FONCTIONS

Exercice 1. On considère la série de fonctions $(\sum_{n \geq 1} f_n)$ avec $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n^3}$.

- Montrer la convergence simple de la série sur \mathbb{R} . On note $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Montrer que la série $(\sum_{n \geq 1} f_n)$ converge normalement sur \mathbb{R} . En déduire que g est continue.
- Montrer que g est dérivable sur \mathbb{R} .

Exercice 2. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie ci-dessous est continue, puis dérivable :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \cos(n^2 x).$$

Exercice 3. On considère la série de fonctions $(\sum_{n \geq 1} f_n)$ avec $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{n+x^3}{x+n^3}$.

- Montrer la convergence simple de la série sur \mathbb{R}_+ . On note $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
- La série $(\sum_{n \geq 1} f_n)$ converge-t-elle normalement sur \mathbb{R}_+ ?
- On fixe $a > 0$.
 - Montrer que pour tout $x \in [0, a]$ on a $|f_n(x)| \leq (n+a^3)/n^3$.
 - Montrer que la série $(\sum_{n \geq 1} f_n)$ converge normalement sur $[0, a]$.
- Montrer que g est continue sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 4. On considère les séries de fonctions $(\sum_{n \geq 1} f_n), (\sum_{n \geq 1} g_n)$ où

$$f_n(x) = \frac{x}{n^3 + x^3}, \quad g_n(x) = \frac{x^2}{n^3 + x^3}.$$

Ces séries convergent-elles normalement sur \mathbb{R}_+ ? sur $[0, a]$ pour a fixé ?
 On étudiera les fonctions f_n, g_n .

Exercice 5. On définit la *fonction ζ de Riemann* en posant, pour tout $x > 1$:

$$\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}.$$

- On fixe $a > 1$. Montrer que la série de fonctions converge normalement sur $[a, +\infty[$.
 Converge-t-elle normalement sur $]1, +\infty[$?
- Montrer que ζ est continue sur $]1, +\infty[$ et déterminer la limite de ζ en $+\infty$.
- Montrer que ζ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et exprimer $\zeta'(x)$ comme somme d'une série.

Exercice 6. Pour tout $x \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2} \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

- Montrer que la série $(\sum f_n)$ converge normalement sur \mathbb{R}_+ . Montrer que g est continue sur \mathbb{R}_+ .
- La série $(\sum f'_n)$ converge-t-elle normalement sur \mathbb{R}_+ ? et sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$?
 Montrer que g est de classe C^2 sur \mathbb{R}_+ . Déterminer $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x)$.
- Calculer $g''(x)$, puis $g'(x)$, pour tout $x > 0$.
- Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = - \int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-t}) dt.$$