Université de Caen
UFR Sciences
L2 Maths

1er semestre 2015-2016
Mathématiques
Analyse

Interrogation n° 1

Question de cours.
Soit $a < b$ deux réels et f une fonction bornée de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

a. Rappelez les définitions des symboles utilisés en cours $I^-(f)$ et $I^+(f)$.
Que signifie le fait que f soit Riemann intégrable sur $[a, b]$?

b. Corrigez ou complétez l'assertion suivante :

« f est Riemann intégrable sur $[a, b]$ si, et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$,
il existe deux fonctions en escalier e_1 et e_2 telles que $\int_a^b (e_2 - e_1) < \epsilon$ »

afin qu'elle soit correcte.

Exercice 1. Donner un « équivalent simple » de $f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{\sqrt{x} - 1}$ lorsque x tend vers 1.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$ on pose $f_n(x) = x \exp(\frac{x}{n})$ et $I_n = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

a. Justifier l'intégrabilité de f_n sur $[0, 1]$, pour tout n.

b. Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante puis qu'elle converge.

c. Déterminer la limite de $(I_n)_n$.
On pourra utiliser l'encadrement suivant : $\forall\ t \in [0, 1] \quad 1 \leq \exp(t) \leq 1 + 2t$.

d. Déterminer un « équivalent simple » de la suite $(J_n)_n$ donnée par $J_n = \int_0^{\frac{1}{n}} y e^y \mathrm{d}y$.
On pourra utiliser la question précédente.