Espaces Fonctionnels — Partiel

Exercice 1. Soit E, F des espaces de Banach et $S \in L'(E, F)$ une application linéaire continue.

1. On suppose qu'il existe $T \in L'(F, E)$ telle que $T \circ S = \mathrm{Id}$.
   (a) Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $\|S(x)\| \geq M\|x\|$.
   (b) Montrer que S est injective et que $\operatorname{Im} S$ est fermée.
   (c) Montrer que $\operatorname{Ker} T$ est un supplémentaire fermé de $\operatorname{Im} S$.
2. On suppose maintenant que S est injective, que $\operatorname{Im} S$ est fermée, et que $\operatorname{Im} S$ admet un supplémentaire fermé $F_0 \subset F$. On considère $G = \{(S(x) + z, x) \mid x \in E,\ z \in F_0\} \subset F \times E$.
   (a) Montrer que G est le graphe d'une application $T : F \to E$.
   On admet que, comme G est un sous-espace, T est linéaire.
   (b) Montrer que T est continue.
   (c) Montrer que $T \circ S = \mathrm{Id}$.
3. On considère le cas $E = F = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, et on suppose que $S \in L'(E)$ est une *isométrie*, c'est-à-dire qu'on a $\|S(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$. Montrer qu'il existe $T \in L'(E)$ tel que $T \circ S = \mathrm{Id}$.

Exercice 2.
On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = C([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0,1]$, muni de la norme de la convergence uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On rappelle qu'une suite de fonctions $f_n \in E$ converge *simplement* vers $f \in E$ si $\lim_{n\infty} f_n(t) = f(t)$ pour tout $t \in [0,1]$.

1. Exemple. On considère les fonctions $f_n \in E$ données par la formule $f_n(t) = n^2 t^n (1-t)$.
   Montrer que la suite de fonctions f_n converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$.
   A-t-on $\lim_{n\infty} \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = 0$? La suite $(f_n)_n$ converge-t-elle vers 0 dans E ?
2. Montrer que les formes linéaires suivantes sont continues sur E :
$$\varphi_0 : f \mapsto f(0), \quad \psi : f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$
3. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions dans E qui converge *faiblement* vers $f \in E$.
   Montrer que $(f_n)_n$ converge simplement vers f.
4. Réciproquement, la converge simple d'une suite de fonctions $f_n \in E$ implique-t-elle sa convergence faible ? Justifier la réponse.

On rappelle le théorème de représentation de Riesz-Markov : pour toute forme linéaire continue $\varphi : E \to \mathbb{R}$ il existe deux mesures boréliennes *finies* μ_+, μ_- sur $[0,1]$ telle que $\varphi(f) = \int f \mathrm{d}\mu_+ - \int f \mathrm{d}\mu_-$ pour toute $f \in E$.
Ici, « finies » signifie que $\mu_-([0,1])$, $\mu_+([0,1]) < +\infty$, de manière équivalente les fonctions constantes sur $[0,1]$ sont intégrables par rapport à μ_- et μ_+.

5. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions dans E qui est *bornée* et converge simplement vers $f \in E$.
   Monter que $(f_n)_n$ converge faiblement vers f.

Exercice 3. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme.

Pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on définit $\varphi_n(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\tfrac{k}{n})$.

1. Montrer que φ_n est une forme linéaire continue sur E telle que $\|\varphi_n\| \leq 2$.
2. En utilisant des fonctions affines par morceaux, montrer que $\|\varphi_1\| = 2$.
   On admet qu'on a plus généralement $\|\varphi_n\| = 2$ pour tout n.
3. On fixe $f \in E$. Que vaut $\lim_{n\infty} \varphi_n(f)$?
4. On suppose que f est K-lipschitzienne : pour tous x, $y \in [0,1]$ on a $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$.
   (a) Montrer l'inégalité suivante :
   $$\Big| \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\mathrm{d}t - \tfrac{1}{n} f(\tfrac{k}{n}) \Big| \leq \frac{K}{2n^2}$$
   (b) En déduire que $\varphi_n(f) = O(\frac{1}{n})$.
5. Montrer qu'il existe une fonction $f \in E$ pour laquelle on n'a pas $\varphi_n(f) = O(\frac{1}{n})$.
   On pourra utiliser le théorème de Banach-Steinhaus.