Révisions

Dans cette feuille, on appelle « équivalent simple de f en a » un équivalent de la forme $C(x-a)^\alpha(\ln(x-a))^\beta$ avec C, α, $\beta \in \mathbb{R}$. On appelle « équivalent simple de f en $+\infty$ » un équivalent de la forme $Cx^\alpha(\ln x)^\beta e^{\gamma x}$. Attention, certaines fonctions n'admettent pas d'équivalent simple !

Exercice 1.

a. Donner des équivalents simples de $\cos(x)$, $(1+x)^3$ en 0. A-t-on $\cos(x) \sim_0 (1+x)^3$?

b. Rappeler « les » équivalents en 0 des fonctions usuelles.
Les fonctions suivantes sont-elles équivalentes en 0 : $\sin x$, x, $x - x^3$, $\tan(x)$, $\cos(x)$?

c. Donner des équivalents simples en 0 des fonctions suivantes :
— $f : x \mapsto \frac{(\sin x)^2}{3x^2}$,
— $g : x \mapsto \tan(x)\ln(1+x)$,
— $h : x \mapsto \frac{x^4-2x^2}{2x^6+x^3}$.

d. Donner un équivalent simple en 0 des fonctions suivantes :
— $i : x \mapsto \sin(x) + x^3$,
— $j : x \mapsto \sin(x) - x$.

e. Parmi les fonctions f, g, h, i, j, lesquelles sont des $O(x)$? des $o(x)$?

Exercice 2. Donner des équivalents simples des fonctions suivantes, en 0 et en $+\infty$:
— $f : x \mapsto x^2 + x$,
— $g : x \mapsto x + \sqrt{x}$,
— $h : x \mapsto x + 1 + \ln(x)$,
— $i : x \mapsto \ln(x) + (\ln(x))^2$,
— $j : x \mapsto e^x + \sin(x)$,
— $k : x \mapsto \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.
Lesquelles de ces fonctions sont des $O(x)$ en 0 ? des $o(x)$? et en $+\infty$?

Exercice 3.
En calculant des DL, donner des équivalents simples des fonctions suivantes aux points demandés :
— $f : x \mapsto 2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2}$ en 0,
— $g : x \mapsto \ln(1+x) + \ln(1-x)$ en 0,
— $h : x \mapsto \ln(x)$ en 0, 1, 2, $+\infty$,
— $i : x \mapsto \sqrt{2+x} - \frac{x}{4} - \frac{3}{2}$ en 2,
— $j : x \mapsto \cos(x) - \sin(x)$ en $\frac{\pi}{4}$,
— $k : x \mapsto e^x - e^{2-x}$ en 1,
— $l : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ en $+\infty$,
— $m : x \mapsto \sqrt{x^2+1} - 2\sqrt[3]{x^3+x} + \sqrt[4]{x^4+x^2}$ en $+\infty$,
— $n : x \mapsto \sin(x) - \cos(x)$ en 0,
— $p : x \mapsto \ln(x+1) - \ln(x)$ en $+\infty$.

Exercice 4.

a. Montrer que si $f \sim_b g$ et $\lim_a u = b$, alors $f \circ u \sim_a g \circ u$ (avec a, $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$).

b. Donner des équivalents simples des fonctions suivantes en 0 :
— $f : x \mapsto \sin((x-1)^2)$ en 1,
— $g : x \mapsto \tan(2\sqrt{x})$ en 0,
— $h : x \mapsto x^2 \sin(\frac{1}{x})$ en $+\infty$.

c. Donner des équivalents simples des fonctions suivantes :
— $i : x \mapsto \arctan(x^2)$ en 0,
— $j : x \mapsto \arccos(x)$ en 1.

d. Montrer que $\ln \circ u \sim_a u - 1$ si $\lim_a u = 1$.
En déduire un équivalent simple de $\ln(\cos x)$ en 0.

Exercice 5.

a. (i) Les fonctions $x \mapsto 2x$, $x \mapsto 2x+1$ sont-elles équivalentes en $+\infty$?
Les fonctions $x \mapsto e^{2x}$, $x \mapsto e^{2x+1}$ sont-elles équivalentes en $+\infty$?
Les fonctions $x \mapsto 1+x$, $x \mapsto 1+x^2$ sont-elles équivalentes en 0 ?
Les fonctions $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \ln(1+x^2)$ sont-elles équivalentes en 0 ?

(ii) Soit u, v deux fonctions telles que $u \sim_a v$. A-t-on $f \circ u \sim_a f \circ v$ pour toute fonction f ?

b. (i) On suppose que $u \sim_a v$. Montrer que $u^\alpha \sim_a v^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

(ii) On suppose que $u \sim_a v$ et $\lim_a u = \lim_a v = 0$ ou $+\infty$. Montrer que $\ln \circ u \sim_a \ln \circ v$.

(iii) Donner des équivalents simples des fonctions suivantes aux points demandés :
— $f : x \mapsto \ln(x^2+1)$ en $+\infty$,
— $g : x \mapsto \sqrt{2x^3+x^2}$ en 0,
— $h : x \mapsto \ln(\sin(x))$ en 0.

Exercice 6. Déterminer des équivalents simples des suites suivantes :
— $r_n = 2n^2 - n$,
— $s_n = \sqrt{n} + (\ln n)^3 + \sin(n)$,
— $t_n = e^n + n^e$,
— $u_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$,
— $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,
— $w_n = \sin(\frac{n+1}{n^2})$,
— $x_n = \ln(1+e^n)$,
— $y_n = \ln(1+e^{-n})$,
— $z_n = \ln(\frac{n+1}{n^2+2})$.

Lesquelles de ces suites sont des $o(n^2)$? des $O(n^{-1})$?

Exercice 7. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on considère la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n \ln(1+x^2)$.
On pose $I_n = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$ et on cherche à étudier la suite $(I_n)_n$.

a. Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante. En déduire qu'elle converge.

b. Trouver un majorant de $\ln(1+x^2)$ sur $[0,1]$. En déduire que $I_n = O(n^{-1})$.
Quelle est la limite de la suite $(I_n)_n$?

c. On pose $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x$.
En utilisant la même méthode que précédemment, déterminer la limite de la suite $(J_n)_n$.

d. Montrer que $I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}$. En déduire un équivalent de la suite $(I_n)_n$.

Exercice 8. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln x)}, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x}, \quad I_3 = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t,$$
$$I_4 = \int_0^1 x^2 e^x \mathrm{d}x, \quad I_5 = \int_1^2 (\ln x)^2 \mathrm{d}x, \quad I_6 = \int_1^e x(\ln x)^2 \mathrm{d}x,$$
$$I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(2x)\ \mathrm{d}x, \quad I_8 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(\sin x)^2}\mathrm{d}x, \quad I_9 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^3(\sin x)^3}{1+(\sin x)^2}\mathrm{d}x,$$
$$I_{10} = \int_0^1 \frac{e^x \mathrm{d}x}{10-3e^x}, \quad I_{11} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+9}.$$

Exercice 9. Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}, \quad f_2(x) = x^2\sqrt{1+x^3}, \quad f_3(x) = \frac{1+\ln x}{x\ln x}, \quad f_4(x) = \frac{x^2}{2+x^3},$$
$$f_5(x) = (x+1)e^x, \quad f_6(x) = e^x \sin x, \quad f_7(x) = \arctan x, \quad f_8(x) = x\cos 2x,$$
$$f_9(x) = \frac{x^2}{(x^2+1)^2}, \quad f_{10}(x) = \frac{x}{x^3-3x+2}, \quad f_{11}(x) = \frac{x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}},$$
$$f_{12}(x) = (x^2-x+3)\sin x, \quad f_{13}(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}, \quad f_{14}(x) = \frac{\sin 3x}{\sqrt{\cos x}}.$$