Espaces de Banach

Exercice 1. On dit qu'un espace métrique X est un *espace de Baire* si pour toute suite d'ouverts denses $U_n \subset X$, l'intersection $\bigcap_n U_n$ est encore dense dans X. Ainsi, les espaces complets sont des espaces de Baire.

a. Montrer qu'un ouvert d'un espace de Baire est un espace de Baire. Montrer que l'intersection d'une suite d'ouverts denses d'un espace de Baire est encore un espace de Baire.

b. Les espaces $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, munis de la restriction de la distance usuelle de $\mathbb{R}$, sont-ils des espaces de Baire ?

c. Montrer que $(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}) \cup (\{0\} \times \mathbb{Q})$, muni de la restriction de la distance usuelle de $\mathbb{R}^2$, est un espace de Baire. Une partie fermée d'un espace de Baire est-elle nécessairement un espace de Baire ? Que dire des parties fermées d'un espace complet ?

Exercice 2. Soit X un espace métrique complet et $(f_n)_n$ une suite de fonctions *continues* de X dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction $f : X \to \mathbb{R}$. On sait qu'en général f n'est pas continue. On va montrer cependant que les points $x \in X$ où f est continue forment une partie dense de X. Pour ce faire on considère les sous-ensembles $F_{\epsilon,n} \subset X$ definis, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$F_{\epsilon,n} = \{x \in X \mid \forall p \geq n \ \ |f_p(x) - f_n(x)| \leq \epsilon\}.$$

a. Montrer que les parties $F_{\epsilon,n}$ sont fermées dans X. Vérifier que $F_{\epsilon,n} \subset F_{\eta,n}$ si $\epsilon \leq \eta$.

b. On fixe $\epsilon > 0$.
   (i) Montrer que la réunion des $F_{\epsilon,n}$, lorsque n parcourt $\mathbb{N}$, est égale à X.
   (ii) Montrer que $U_\epsilon = \bigcup_n F_{\epsilon,n}^\circ$ est un ouvert dense de X.

c. On considère $C = \bigcap_{\epsilon>0} U_\epsilon$.
   (i) Écrire l'assertion « $x \in C$ » avec des quantificateurs, sans utiliser les sous-ensembles $F_{\epsilon,n}$. Qu'obtient-on en faisant tendre p vers $+\infty$ dans cette assertion ?
   (ii) Écrire la définition de la continuité de f_n en x. Montrer que f est continue en x.

d. Conclure.

e. Application. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que les points où f' est continue forment une partie dense de I.

Exercice 3. On munit $E = \mathcal{C}([0,1])$ de la norme de la convergence uniforme et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère le sous-ensemble suivant de E :

$$U_n = \{f \in E \mid \forall x \in [0,1] \quad \exists y \in [0,1] \quad |f(x) - f(y)| > n|x-y|\}.$$

a. Montrer que U_n est un ouvert dense de E. *On admettra que toute fonction continue sur* $[0,1]$ *est limite uniforme de fonctions affines par morceaux dont les pentes sont plus grandes que n en valeur absolue.*

b. Montrer qu'il existe une partie dense de $\mathcal{C}([0,1])$ dont les éléments ne sont dérivables en aucun point de $[0,1]$.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel normé. On suppose que pour toute série à valeurs dans E, la convergence normale implique la convergence.

a. Soit $(x_n)_n$ une suite à valeurs dans E telle que $\|x_{n+1} - x_n\| \leq 2^{-n}$ pour tout n. Montrer que $(x_n)_n$ converge.

b. Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans E. Montrer que l'on peut extraire de $(x_n)_n$ une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ telle que $\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\| \leq 2^{-n}$ pour tout n.

c. Montrer que E est complet.

Exercice 5. Soit E un espace de Banach.

a. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E distinct de E. Montrer que F ne contient aucune des boules $B(0,r)$, pour $r > 0$. Montrer que F est d'intérieur vide.

b. On suppose que E est réunion croissante de sous-espaces fermés F_n. Montrer qu'il existe n tel que $E = F_n$.

c. Montrer qu'un espace de Banach de dimension infinie n'admet pas de base (algébrique) dénombrable.

Exercice 6. Soit E un espace de Banach, décomposé sous la forme $E = F \oplus G$. On note p la projection sur F parallèlement à G.

a. Exprimer F et G à l'aide de p. En déduire que si p est continue, F et G sont fermés.

b. À l'aide du théorème du graphe fermé, montrer que si F et G sont fermés alors p est continue.

c. On prend $E = \mathcal{C}([0,1])$, F le sous-espace des fonctions constantes, G celui des fonctions nulles en 0. La projection p est-elle continue relativement à $\|\cdot\|_\infty$? à $\|\cdot\|_1$?

Exercice 7. Soit E, F des espaces de Banach, $S \in L'(E,F)$.

a. Montrer que S est injective à image fermée si et seulement si il existe un réel $M > 0$ telle que $\|S(x)\| \geq M\|x\|$ pour tout $x \in E$.

b. Montrer qu'il existe $T \in L'(F,E)$ tel que $S \circ T = \mathrm{Id}$ si et seulement si S est surjective et $\mathrm{Ker}\, S$ admet un supplémentaire topologique. *Pour la réciproque on pourra utiliser l'exercice* **??**.

Exercice 8. Soit E_1, E_2, F des espaces de Banach et $T_1 \in L'(E_1,F)$, $T_2 \in L'(E_2,F)$ tels que $\mathrm{Im}\, T_1 \subset \mathrm{Im}\, T_2$. On considère $G = \{(x,y) \in E_1 \times E_2 \mid T_1(x) = T_2(y)\}$.

a. Montrer que l'application $p_1 : G \to E_1$, $(x,y) \mapsto x$ est surjective.

b. Montrer l'existence d'un réel $M > 0$ tel que pour tout $x \in E_1$ il existe $y \in E_2$ tel que $T_1(x) = T_2(y)$ et $\|y\| \leq M\|x\|$.

c. Montrer l'existence d'une application linéaire $R : E_1 \to E_2$ telle que $T_1 = T_2 \circ R$. Montrer que si T_2 est injective, R (qui est alors unique) est continue. En général, est-il toujours possible de supposer R continue ?

Exercice 9. On cherche à estimer la norme dans $L^1([0,2\pi])$ du noyau de Dirichlet

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)}.$$

Pour cela on découpe l'intégrale aux points où D_n change de signe :

$$\|D_n\|_1 = 2\int_0^\pi |D_n(t)|\mathrm{d}t = 2\sum_{k=0}^{n-1} I_{n,k} + 2\int_{\frac{2n\pi}{2n+1}}^{\pi} |D_n(t)|\mathrm{d}t, \quad \text{avec} \quad I_{n,k} = \int_{\frac{2k\pi}{2n+1}}^{\frac{2(k+1)\pi}{2n+1}} |D_n(t)|\mathrm{d}t.$$

a. En utilisant l'inégalité $\sin x \leq x$ valable sur $\mathbb{R}_+$, montrer que $I_{n,k} \geq 4/((k+1)\pi)$.

b. En déduire que $\|D_n\|_1$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 10. Pour $f \in L^1([0,2\pi])$ on note $c_k(f) = \int_0^{2\pi} e^{-ikt} f(t)\mathrm{d}t$ le k^{e} coefficient de Fourier de f et on considère la transformée de Fourier $T : L^1([0,2\pi]) \to \ell^\infty(\mathbb{Z})$, $f \mapsto (c_n(f))_n$. On rappelle que T est injective et que son image est contenue dans $c_0(\mathbb{Z})$ (*lemme de Riemann-Lebesgue*). On va montrer qu'il existe des suites $(c_n)_n \in c_0(\mathbb{Z})$ qui ne sont les suites de coefficients de Fourrier d'aucune fonction $f \in L^1(\mathbb{Z})$.

a. Montrer que T est un opérateur borné relativement à la norme de $L^1([0,2\pi])$ et à la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $c_0(\mathbb{Z})$.

b. Étudier le comportement de $\|T(D_n)\|_\infty / \|D_n\|_1$ lorsque $n \to \infty$, où D_n est le noyau de Dirichlet étudié à l'exercice **??**.

c. À l'aide du théorème des isomorphismes de Banach, montrer que $\mathrm{Im}\, T \neq c_0(\mathbb{Z})$.

Exercice 11. Soit E l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues et 2π-périodiques, muni de la norme de la convergence uniforme. On note $c_k(f) = \int_0^{2\pi} e^{-ikt} f(t)\mathrm{d}t$ le k^{e} coefficient de Fourier de $f \in E$ et $S_n(f) : t \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikt} \in E$ les sommes partielles symétriques de la série de Fourier associée à f.

a. Montrer que $S_n(f)(t) = \int_0^{2\pi} f(s) D_n(t-s)\mathrm{d}s$, où D_n est le noyau de Dirichlet introduit à l'exercice **??**.

b. En déduire la norme d'opérateur de S_n, vu comme élément de $L'(E)$.

c. À l'aide du théorème de Banach-Steinhaus, montrer qu'il existe une fonction $f \in E$ telle que la série de Fourier de f ne converge pas uniformément.

d. On fixe $t \in [0,2\pi]$ et on considère la forme linéaire $L_n : f \mapsto S_n(f)(t)$. Calculer la norme de L_n dans E'.

e. À l'aide du théorème de Banach-Steinhaus, montrer qu'il existe une fonction $f \in E$ telle que la série de Fourier de f ne converge pas au point t.