Intégration des fractions rationnelles

Rappels.

Une *fraction rationnelle* est un quotient de polynômes, $F = P/Q$ avec P, $Q \in \mathbb{R}[X]$. On note $\mathbb{R}(X)$ l'ensemble des frations rationnelles. Le *degré* de $F = P/Q \in \mathbb{R}(X)$ est $\deg F = \deg P - \deg Q$.

Toute fraction rationnelle F s'écrit de manière unique comme somme d'un polynôme E, appelé *partie entière* de F, et d'une fraction rationnelle G de degré strictement négatif : $F = E + G$ avec $E \in \mathbb{R}[X]$, $G \in \mathbb{R}(X)$, $\deg G < 0$.

Toute fraction rationnelle réelle F de degré strictement négatif s'écrit de manière unique comme somme d'*éléments simples*. Les éléments simples sont les fractions rationnelles d'une des deux formes suivantes :

— *première espèce* : $\dfrac{a}{(X-r)^k}$ avec a, $r \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$;

— *deuxième espèce* : $\dfrac{aX+b}{(X^2+pX+q)^k}$ avec a, b, p, $q \in \mathbb{R}$ et $p^2 - 4q < 0$.

On remarque que les dénominateurs de ces éléments simples sont les puissances de polynômes irréductibles.

Ces éléments simples sont « faciles » à intégrer. Ainsi on dispose d'une méthode systématique pour intégrer n'importe quelle fraction rationnelle.

Méthode. Pour calculer la partie entière d'une fraction rationnelle $F = P/Q$ on procède à la division euclidienne de P par Q, qui est de la forme $P = EQ + R$ avec $\deg R < \deg Q$. On a alors $F = E + G$ où $G = R/Q$ est bien de degré strictement négatif.

Exemple. Considérons $F = \dfrac{P}{Q} = \dfrac{2X^4 - X^3 + 7X^2 - 6X - 12}{X^3 - X^2 + 4X - 4}$.

On a $\deg F = 1$. La division euclidienne de P par Q s'écrit $P = (2X+1) \times Q - (2X+8)$.

On a ainsi $F = (2X+1) - G$ avec $G = \dfrac{2X+8}{X^3 - X^2 + 4X - 4}$.

Méthode. Pour déterminer la forme des éléments simples qui apparaissent dans la décomposition de $F = P/Q$, il faut d'abord écrire F sous forme irréductible, c'est-à-dire avec P et Q premiers entre eux, puis écrire la décomposition de Q en facteurs irréductibles : $Q = Q_1^{n_1} Q_2^{n_2} \cdots Q_p^{n_p}$ avec les Q_i irréductibles et deux-à-deux distincts. Alors les éléments simples qui apparaissent (potentiellement) dans la décomposition de F sont ceux dont le dénominateur est de la forme Q_i^k, avec $k \le n_i$.

Exemple (suite). On commence par factoriser le dénominateur : 1 est racine évidente, donc on peut factoriser $X - 1$ et on trouve $X^3 - X^2 + 4X - 4 = (X-1)(X^2+4)$. Le deuxième facteur $X^2 + 4$ est irréductible. Le seul facteur irréductible du numérateur de G est $X + 4$, donc G est écrite sous forme irréductible et on sait que sa décomposition en éléments simples sera de la forme :

$$G = \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{X^2+4}.$$

Méthode. Pour achever la décomposition en éléments simples, il reste à déterminer les coefficients a, b, ..., qui apparaissent aux numérateurs des éléments simples. Pour cela une méthode possible est de réduire les éléments simples (avec numérateurs inconnus) au même dénominateur, puis d'écrire leur somme comme une seule fraction rationnelle, et enfin d'identifier les coefficients du numérateur obtenu avec ceux qui apparaissent dans F. On obtient un système linéaire qui donne les coefficients a, b, ...

Exemple (suite). Pour déterminer a, b, c on réduit au même dénominateur et on regroupe :

$$\frac{2X+8}{X^3 - X^2 + 4X - 4} = G = \frac{(a+b)X^2 + (c-b)X + 4a - c}{X^3 - X^2 + 4X - 4}.$$

Par identification cela donne $a + b = 0$, $c - b = 2$, $4a - c = 8$. En résolvant ce système linéaire on obtient $a = 2$, $b = -2$, $c = 0$. Finalement la décomposition de F est

$$F = 2X + 1 - \frac{2}{X-1} + \frac{2X}{X^2+4}.$$

Intégration.

Les polynômes et les éléments simples de première espèce sont très faciles à intégrer. Ainsi $a\ln(|x-r|)$ est une primitive de $a/(x-r)$, et $-a/[(k-1)(x-r)^{k-1}]$ est une primitive de $a/(x-r)^k$ pour $k>1$.

Certains éléments simples de deuxième espèce sont également facile à intégrer : ce sont ceux de la forme $(2x+p)/(x^2+px+q)^k$. En effet on reconnaît une fonction de la forme u'/u^k, et une primitive est $\ln(x^2+px+q)$ (pour $k=1$) ou $-1/(k-1)(x^2+px+q)^{k-1}$ (pour $k>1$).

Quitte à faire des combinaisons linéaires, il ne reste alors plus qu'à savoir intégrer les éléments simples de la forme $1/(x^2+px+q)^k$ — ce sont en fait des éléments compliqués ! Pour ce cas il faut commencer par mettre le trinôme sous forme canonique, $x^2+px+q=(x-r)^2+s^2$ avec $r=-p/2$ et $s^2=q-p^2/4>0$. En factorisant s^2 puis en faisant un changement de variable affine on se ramène aux cas $1/(x^2+1)^k$. Si $k=1$, on sait que $\arctan x$ est une primitive.

Pour intégrer $1/(x^2+1)^k$ lorsque $k>1$ on peut poser $x=\tan t$. Grâce aux formules $\tan'=1/\cos^2=1+\tan^2$, cela conduit à chercher une primitive de $\cos^{2k-2}$, ce qui peut se faire en linéarisant le cosinus. On peut également procéder par récurrence grâce à l'astuce suivante — le deuxième terme s'intègre par parties en dérivant l'un des facteurs x au numérateur :

$$\frac{1}{(x^2+1)^k}=\frac{1}{(x^2+1)^{k-1}}-\frac{x\times x}{(x^2+1)^k}.$$

Exemple (suite). L'élément de seconde espèce est de la forme u'/u donc il est facile d'obtenir une primitive de $F(x)$:

$$\int^x F(t)\mathrm{d}t=x^2+x-2\ln(|x-1|)+\ln(x^2+4)+C.$$

Exercice 1. Calculer la partie entière et le reste des fractions rationnelles suivantes :

$$F_1=\frac{2X^4+4X^3+X^2+X+1}{X^3+2X^2+X},\quad F_2=\frac{3X^3-5X^2+6X-8}{X^3-X^2+X-1},$$
$$F_3=\frac{-2X^2+13X-12}{X^3-3X^2+4},\quad F_4=\frac{-3X^3+X^2-5X-1}{X^5-X^4+2X^3-2X^2+X-1},$$
$$F_5=\frac{X^4+7X^2+2X+13}{X^4+8X^2+16},\quad F_6=\frac{X^4+3X^2-12X}{X^3+X^2+3X-5}.$$

Exercice 2. Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples :

$$G_1=\frac{-X^2+X+1}{X^3+2X^2+X},\quad G_2=\frac{-2X^2+3X-5}{X^3-X^2+X-1},$$
$$G_3=\frac{-2X^2+13X-12}{X^3-3X^2+4},\quad G_4=\frac{-3X^3+X^2-5X-1}{X^5-X^4+2X^3-2X^2+X-1},$$
$$G_5=\frac{-X^2+2X-3}{X^4+8X^2+16},\quad G_6=\frac{X^2-4X-5}{X^3+X^2+3X-5}.$$

Exercice 3. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$F_1(x)=2x+\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2},\quad F_2(x)=3-\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x^2+1},$$
$$F_3(x)=\frac{2}{(x-2)^2}+\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x+1},\quad F_4(x)=\frac{2x-1}{x^2+1}+\frac{2x}{(x^2+1)^2}-\frac{2}{x-1},$$
$$F_5(x)=\frac{2x+1}{(x^2+4)^2}-\frac{1}{x^2+4}+1,\quad F_6(x)=x-1-\frac{1}{x-1}+\frac{2x}{x^2+2x+5}.$$