Intégration

Exercice 1. Les fonctions suivantes sont-elles uniformément continues ?

$f : x \mapsto x$ sur $[0,1]$, sur $\mathbb{R}$, $g : x \mapsto \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$, $h : x \mapsto x\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$,
$i : x \mapsto \ln(x)$ sur $]0,1]$, sur $[1,+\infty[$, $j : x \mapsto x\ln(x)$ sur $]0,1]$.

Exercice 2. On fixe $A \in [0,+\infty[$ ou $A = +\infty$, et une fonction $f : [0,A[\to \mathbb{R}$.

a. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq 1$ pour tous x, $y \in [0,1[$ tels que $|x - y| \leq \alpha$.
Montrer par récurrence que $|f(x) - f(0)| \leq n$ pour tout $x \in [0, n\alpha]$.

b. Montrer que si f est uniformément continue et $A < +\infty$, alors f est bornée.
Ce résultat est-il encore vrai pour $A = +\infty$?

Exercice 3. Soit $f : [0,+\infty[$ une fonction continue.

a. On fixe $\epsilon > 0$ et on suppose que pour tous x, $y \geq A$ on a $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$.
Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$ pour tous x, $y \geq 0$ tels que $|x - y| \leq \alpha$.

b. Montrer que si f admet une limite finie l en $+\infty$, alors f est uniformément continue.

Exercice 4. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f, $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions.
On suppose que f et g sont bornées : il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ et $|g(x)| \leq M$ pour tout $x \in I$.

a. Montrer que $|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq M|f(x) - f(y)| + M|g(x) - g(y)|$ pour tous x, $y \in I$.

b. Montrer que si f et g sont uniformément continues, alors c'est aussi le cas de fg.
Ce résultat est-il encore valable si f ou g n'est pas bornée ?
Que peut-on dire si I est un intervalle borné ?

Exercice 5.

a. On considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ sinon.
La fonction f est-elle intégrable au sens de Riemann ? Rappeler pourquoi.

b. On considère la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$, et $g(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q}$ pour $0 \leq p \leq q$ entiers premiers entre eux. On fixe un nombre premier P.

(i) Trouver une fonction en escalier h telle que $g(x) \leq h(x)$ pour tout $x \in [0,1]$, et $h(x) \leq \frac{1}{P}$ *sauf pour un nombre fini de points* $x \in [0,1]$.

(ii) Montrer que g est intégrable au sens de Riemann. Que vaut $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$?

Exercice 6. Calculer les intégrales suivantes en utilisant des sommes de Riemann : $I = \int_0^1 t\mathrm{d}t$, $J = \int_0^x e^t\mathrm{d}t$.

Exercice 7. Calculer la limite des suites suivantes :

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+n^2}, \quad C_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2},$$

$$D_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k)}, \quad E_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n+1}{k^2+n^2}, \quad F_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}, \quad G_n = \prod_{k=1}^{n} \sqrt[n]{1+\frac{k}{n}}.$$

Donner un équivalent de $H_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

Exercice 8. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \tfrac{1}{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right) = \exp \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

On pourra utiliser l'encadrement $x - x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$, valable pour tout $x \geq -\frac{1}{2}$.

Exercice 9. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $n \in \mathbb{N}$ un entier fixé. On suppose qu'on a

$$\forall k \in \{0, \dots, n\} \quad \int_a^b x^k f(x) \mathrm{d}x = 0.$$

On veut montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[a,b]$.
On note $a \leq x_1 < \dots < x_p \leq b$ les points où f change de signe.

a. Quelle conclusion veut-on obtenir dans le cas $n = 0$? Le résultat est-il vrai dans ce cas ?
b. Montrer qu'on a $\int_a^b P(x)f(x)\mathrm{d}x = 0$ pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à n.
c. Posons $P = \prod_{i=1}^p (X - x_i)$. En supposant que $p \leq n$, montrer qu'on a $P(x)f(x) = 0$ pour tout $x \in [a,b]$.
d. Conclure.

Exercice 10. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Montrer qu'on a $\int_a^b |f| = |\int_a^b f|$ si et seulement si f est positive sur $[a,b]$ ou négative sur $[a,b]$.
Indication. Pour la réciproque on distinguera les deux cas $\int_a^b f \geq 0$, $\int_a^b f \leq 0$.
On remarquera également qu'on a $|y| - y \geq 0$ et $|y| + y \geq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 11. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_a^b f(x)^2 \mathrm{d}x + \int_a^b f(x)^4 \mathrm{d}x = 2\int_a^b f(x)^3 \mathrm{d}x$.
Montrer que f est constante sur $[a,b]$, égale à 0 ou à 1. *Indication :* factoriser le polynôme $X^4 - 2X^3 + X^2$.

Exercice 12. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on définit une fonction $f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ x \mapsto (n+1)(\cos x)^n \sin x$.

a. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\mathrm{d}x$ pour tout n.
b. On fixe $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Déterminer la limite de la suite $(f_n(x))_n$, que l'on notera $f(x)$.
On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge *simplement* (ou point par point) vers la fonction f.
c. A-t-on $\lim_{n\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$?

Exercice 13. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on considère la fonction $f_n : [1,e] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2(\ln x)^n$. On pose $I_n = \int_1^e f_n(x)\mathrm{d}x$.

a. Justifier l'intégrabilité de f_n sur $[1,e]$.
b. Déterminer la limite $f(x) = \lim_{n\infty} f_n(x)$, pour tout $x \in [1,e]$.
La fonction f est elle-continue sur $[1,e]$? est-elle intégrable ?
c. Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante et en déduire qu'elle converge.
d. En majorant x^3 par e^3 sur $[1,e]$, donner un majorant de f_n sur $[1,e]$, et en déduire un majorant de I_n.
e. Quelle est la limite de la suite $(I_n)_n$? A-t-on $\lim_{n\infty} \int_1^e f_n(x)\mathrm{d}x = \int_1^e f(x)\mathrm{d}x$?

Exercice 14. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on étudie la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n - x^{n+1}$.

a. Déterminer la limite $f(x) = \lim_{n\infty} f_n(x)$, pour tout $x \in [0,1]$.
On a ainsi $|f(x) - f_n(x)| \to 0$ pour tout x.
b. Étudier la fonction f_n sur $[0,1]$, pour tout n.
c. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_n$ qui tend vers 0 et telle que $|f(x) - f_n(x)| \leq a_n$ pour tout $x \in [0,1]$.
On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge *uniformément* vers la fonction f.
d. On pose $I_n = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$. Montrer *sans calcul supplémentaire* que $(I_n)_n$ converge, et déterminer sa limite.

Exercice 15. Pour chaque n on définit une fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+x^n}$. On pose $I_n = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

a. Déterminer la limite (simple) f de la suite de fonctions $(f_n)_n$.
b. Montrer que la suite $(I_n)_n$ est croissante. Converge-t-elle ?
c. Montrer que $1 - f_n(x)$ est majoré par x^n pour tout $x \in [0,1]$. En déduire la limite de la suite $(I_n)_n$.
d. A-t-on $\lim_{n\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$?
La convergence de la suite de fonctions $(f_n)_n$ vers f est-elle uniforme ?
e. Justifier l'identité suivante :

$$1 - I_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x.$$

f. En déduire le développement asymptotique $I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o(\frac{1}{n})$.