Convexité et Dualité

Exercice 1. Soit E un EVN, $F \subset E$ un sous-espace vectoriel, et G un EVN de dimension finie.

a. Montrer que toute application linéaire continue $S \in L'(F, G)$ peut se prolonger en un application linéaire continue $T \in L'(E, G)$.

b. On suppose F de dimension finie.
   (i) Montrer que F est fermé.
   (ii) Montrer qu'il existe $T \in L'(E, F)$ telle que $T(x) = x$ pour tout $x \in F$.
   (iii) Monter que F admet un supplémentaire fermé.

Exercice 2. Soit E un EVN et $C \subset E$ une partie convexe fermée. On considère

$$A = \{(\varphi, m) \in E' \times \mathbb{R} \mid m \leq \inf \varphi(C)\}.$$

Montrer que $C = \bigcap_{(\varphi,m)\in A} \{x \in E \mid \varphi(x) \geq m\}$.
Ainsi tout convexe fermé est une intersection de demi-espaces fermés.

Exercice 3. On considère $E = L^2([0, 1], \mathbb{R})$ et les sous-ensembles

$$C_\alpha = \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = \alpha\}.$$

a. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, C_α est convexe.

b. On fixe $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que toute fonction $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ est limite dans E de fonctions $g \in C_\alpha$.
On pourra approcher f par une fonction $g \in C_\alpha$ égale à f sur un intervalle du type $[\epsilon, 1]$.

c. Montrer que C_α est dense dans E.

d. Montrer que, pour $\alpha \neq \beta$, il n'existe pas d'hyperplan fermé qui sépare C_α de la fonction constante β.

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{R}$-EV muni de deux semi-normes p_1, p_2, et $\varphi \in E^*$ une forme linéaire telle que $|\varphi| \leq p_1 + p_2$.
Montrer qu'on peut écrire $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ avec $|\varphi_1| \leq p_1$, $|\varphi_2| \leq p_2$.
On pourra utiliser le sous-espace $D = \{(x, x) \mid x \in E\} \subset E \times E$ et $\psi : D \to \mathbb{R}$, $(x, x) \mapsto \varphi(x)$.

Exercice 5. Soit E, F des espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire. On suppose que pour toute forme linéaire continue $\varphi \in F'$, la forme linéaire $\varphi \circ T \in E^*$ est également continue.

a. On note $G(T) \subset E \times F$ le graphe de T. Montrer que

$$G(T) = \{(x, y) \in E \times F \mid \forall \varphi \in F' \quad \varphi \circ T(x) = \varphi(y)\}.$$

b. Montrer que T est continu.

Application. On suppose que l'espace vectoriel E est muni de deux normes p et $q : E \to \mathbb{R}$. On note E'_p, E'_q les duaux topologiques associés, qui sont des sous-espaces du dual algébrique E^*.

c. On suppose que $E'_q \subset E'_p$. Montrer que l'injection canonique $\iota : E'_q \to E'_p$ est continue.

d. Montrer que $E'_q \subset E'_p$ si et seulement s'il existe une constante $M > 0$ telle que $q \leq Mp$.

Exercice 6. Soit E un EVN et $X \subset E$ une partie de E telle que, pour toute forme linéaire continue $\varphi \in E'$, l'ensemble $\varphi(X) \subset \mathbb{R}$ est borné.

a. À l'aide du principe de la borne uniforme, montrer l'existence d'une constante $M > 0$ telle que $|\varphi(x)| \leq M\|\varphi\|$ pour tout $x \in X$ et toute $\varphi \in E'$.

b. En déduire que X est borné (en norme) dans E.

Exercice 7. On considère $E = \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et l'opérateur borné $S : E \to E$ donné par $S(x) = (x_{k+1})_k$ si $x = (x_k)_k \in E$. On note $I = \operatorname{Im}(S - \operatorname{Id}) \subset E$, e la suite constante égale à 1, et $C = \mathbb{R}e$ le sous-espace des suites constantes. On définit une forme linéaire $L_0 : I + C \to \mathbb{R}$ en posant $L_0((S - \operatorname{Id})(x) + \lambda e) = \lambda$.

a. Montrer que I et C sont en somme directe. Ainsi L_0 est bien définie.

b. On considère la forme linéaire $c_n \in E'$ donnée par $c_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x_k$ si $x = (x_k)_k$.
 (i) Montrer que pour $z \in I + C$ on a $L_0(z) = \lim c_n(z)$.
 (ii) En déduire que L_0 est continue.

c. Montrer qu'il existe une forme linéaire $L \in E'$ telle que $\|L\| = 1$, $L(e) = 1$ et $L \circ S = L$.

Dans la suite on fixe une telle forme linéaire L.
Remarque : on peut montrer qu'il existe une infinité de formes linéaires L convenables.

d. (i) Soit $x = (x_k)_k$, $y = (y_k)_k$ deux suites dans E.
 On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_k = y_k$ pour tout $k \geq n$.
 Montrer que $L(x) = L(y)$.
 (ii) Montrer que $L(x) = 0$ pour toute suite $x \in c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ qui tend vers 0.
 En déduire que si la suite $x = (x_k)_k \in E$ converge, on a $L(x) = \lim_{k\infty} x_k$.

e. On considère $x = (1, 0, 1, 0, 1, \ldots) \in E$. Calculer $L(x)$. *On pourra utiliser $S(x)$.*
 A-t-on $L(xy) = L(x)L(y)$ pour toutes les suites x, $y \in E$?

f. Questions subsidiaires.
 Soit $x = (x_k)_k \in E$ telle que $x_k \geq 0$ pour tout x. En considérant $\|x\|e - x$, montrer que $L(x) \geq 0$.
 Montrer que pour toute suite $x = (x_k)_k \in E$ on a $\liminf x_k \leq L(x) \leq \limsup x_k$.

Exercice 8.

a. On fixe $x \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et on pose, pour $y = (y_n)_n$, $\varphi(x) = \sum_{n=0}^\infty x_n y_n$.
 (i) Montrer que cela définit une forme linéaire bornée $\varphi : \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.
 (ii) Montrer que $\|\varphi\| = \|x\|$. *On pourra commencer par le cas où $\sup |x_n|$ est atteint.*
 (iii) Montrer que toute forme linéaire bornée sur $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ est de cette forme.
 On procèdera par analyse-synthèse pour trouver un x convenable.

b. (i) On fixe $x \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et on pose, pour $y = (y_n)_n$, $\varphi(x) = \sum_{n=0}^\infty x_n y_n$.
 Montrer que cela définit une forme linéaire bornée $\varphi : \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ et que $\|\varphi\| = \|x\|$.
 (ii) Soit $(x_n)_n$ une suite réelle quelconque telle que $(\sum x_n y_n)$ converge pour toute suite $y = (y_n)_n \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
 Montrer que $x = (x_n)_n \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
 (iii) Toutes les formes linéaires bornées sur $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ sont-elles de la même forme qu'au b(i) ?

Exercice 9. Soit $E = \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ avec $p \in [1, +\infty]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère l'élément $e_n = (\delta_{nk})_k \in E$.

a. On considère le cas $p = 2$.
 (i) On fixe $\varphi \in E'$ et $n \in \mathbb{N}$. En considérant l'élément $x = \sum_{k=0}^n \varphi(e_k) e_k$, montrer que $\sum_{k=0}^n \varphi(e_k)^2 \leq \|\varphi\|^2$.
 (ii) Montrer que $(e_n)_n$ converge faiblement vers 0 dans E. A-t-on convergence en norme ?

b. Montrer que le résultat de la question précédente reste valable pour $p = +\infty$.
 On considèrera $x = \sum_{k=0}^n \operatorname{sgn} \varphi(e_k) e_k$.

c. Montrer que le résultat de la question précédente reste valable pour tout $p \in]1, +\infty[$.
 On considèrera $x = \sum_{k=0}^n [\varphi(e_k)]^{q-1} e_k$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $[x]^q = \operatorname{sgn}(x)|x|^q$.

d. On considère le cas $p = 1$.
 Trouver une forme linéaire continue $\varphi \in E'$ telle que $\varphi(e_n)$ ne tend pas vers 0.

Exercice 10. Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie. On fixe une base hilbertienne $(e_n)_n$ de H. Soit $(\zeta_n)_n$, $(\xi_n)_n$ deux suites de vecteurs dans H.

a. Montrer que $(e_n)_n$ converge faiblement vers 0. A-t-on convergence en norme ?

b. On suppose que $(\zeta_n)_n$ converge faiblement vers $\zeta \in H$ et que $(\xi_n)_n$ converge vers $\xi \in H$ en norme.
 Montrer que $\lim_{n\infty} (\zeta_n | \xi_n) = (\zeta | \xi)$.

c. Le résultat de la question précédente reste-t-il valable si on suppose seulement la convergence faible de $(\xi_n)_n$?

Exercice 11. Soit E un EVN de dimension infinie.
On note $B = \{x \in E \mid \|x\| < 1\}$, $\bar{B} = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$, $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$.

a. Soit $U \subset E$ un ouvert faible contenant 0. Montrer que U contient une droite.

b. Montrer que B est d'intérieur vide pour la topologie faible.

c. Montrer que 0 est adhérent à S pour la topologie faible.

d. Montrer que $\bar{B}$ est fermé pour la topologie faible.

e. Quelle est l'adhérence de S pour la toplogie faible ?