Compacité

Exercice 1. On définit une suite de fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par récurrence en posant, pour tout $t \in [0,1]$: $f_0(t) = 0$ et $f_{n+1}(t) = f_n(t) + \frac{1}{2}(t - f_n(t)^2)$.

a. On fixe $t \in [0,1]$. Étudier la suite récurrente $(f_n(t))_n$.
On montrera notamment qu'elle est croissante et converge vers un réel $g(t)$ que l'on calculera.

b. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers g.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, t \mapsto 1 - (1-t)^n$.

a. Montrer que la suite $(f_n)_n$ est croissante est converge simplement.

b. Montrer que chaque fonction f_n est croissante et continue.

c. La suite $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

d. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et nulle en 0.
Montrer que la suite $(gf_n)_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 3. On considère l'espace $X = [0,1]^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $[0,1]$, muni de la topologie produit. On identifie un polynôme $P \in \mathbb{R}[X_0, \ldots, X_n]$ à $n+1$ variables avec une fonction de X dans $\mathbb{R}$ en posant $P(x) = P(x_0, \ldots, x_n)$ si $x = (x_k)_k \in X$. On note A l'ensemble des « fonctions polynômiales » de X dans $\mathbb{R}$ ainsi construit.

a. Montrer que $A \subset C(X, \mathbb{R})$.

b. Montrer que A est dense dans $C(X, \mathbb{R})$ pour la norme du sup.

Exercice 4. Soit $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ le disque unité fermé dans $\mathbb{C}$. On note $A \subset C(D, \mathbb{C})$ le sous-espace des fonctions polynômiales $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ (avec $a_k \in \mathbb{C}$) et on munit $C(D, \mathbb{C})$ de la norme du sup.

a. Montrer que A est une sous-algèbre unifère de $C(D, \mathbb{C})$ qui sépare les points.

b. Montrer que l'application $\varphi : f \mapsto (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \mathrm{d}t$ est continue sur $C(D, \mathbb{C})$.

c. Montrer que pour tout $f \in A$ on a $\varphi(f) = f(0)$.

d. Montrer que A n'est pas dense dans $C(D, \mathbb{C})$.

e. Quelle hypothèse faut-il rajouter au théorème de Stone-Weierstraß dans le cas de fonctions à valeurs complexes ?

Exercice 5. Soit X un espace métrique et $f_n \in C(X, \mathbb{R})$ une suite décroissante de fonctions qui converge simplement vers la fonction nulle.

a. (i) On fixe $x \in X$ et $\epsilon > 0$. On suppose que $f_n(x) \leq \epsilon/2$.
Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $f_p(y) \leq \epsilon$ pour tout $p \geq n$ et tout $y \in X$ tel que $d(x,y) \leq \alpha$.

(ii) Montrer que la suite $(f_n)_n$ est équicontinue.

b. On suppose de plus que X est compact.
À l'aide d'un lemme du cours, montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément.

Exercice 6. On considère un sous-espace F fermé dans $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$. On suppose que toutes les fonctions $f \in F$ sont de classe C^1. On munit $C^1([0,1], \mathbb{R})$ de la norme $N : f \mapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ et on rappelle que $C^1([0,1], \mathbb{R})$ est complet pour cette norme.

a. Montrer que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N sont équivalentes sur le sous-espace E.
On pourra utiliser le théorème des isomorphismes de Banach.

b. On note $\bar{B}$ la boule unité fermée de E relativement à la norme $\|\cdot\|_\infty$.
Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que toutes les fonctions $f \in \bar{B}$ sont lipschitziennes de rapport C.

c. Montrer que $\bar{B}$ est équicontinue.

d. Montrer que E est nécessairement de dimension finie.

Exercice 7. On travaille dans l'EVN $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. On considère l'application linéaire $I : E \to E$ qui à $f \in E$ associe la primitive de F nulle en 0.

a. Donner une formule intégrale pour $I(f)(t)$, $f \in E$, $t \in [0,1]$. Montrer que I est continu.

b. On note $B(0,1)$ la boule unité ouverte de E. Montrer que $I(B)$ est équicontinue.

c. Montrer que pour toute partie bornée $B \subset E$, $\overline{I(B)}$ est un compact de E.

Exercice 8. On se place dans l'espace $E = c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites réelles de limite nulle, muni de la norme du sup. On rappelle que E' s'identifie à $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ via la formule $\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i$.
On pose $x_n = (1, \ldots, 1, 0, \ldots) = (\delta_{i \le n})_i \in E$.

a. Montrer que la convergence faible dans E implique la convergence simple.

b. La suite $(x_n)_n$ converge-t-elle faiblement dans E ?
A-t-elle des suites extraites qui convergent faiblement dans E ?

c. Montrer que la boule unité fermée de E n'est pas faiblement compacte.

On considère maintenant x_n comme un élément de $E' = \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. On rappelle que E'' s'identifie à $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ via la même formule que précédemment.

d. La suite $(\frac{1}{n} x_n)_n$ dans E' converge-t-elle en norme ? faiblement ? préfaiblement ?

Exercice 9. Soit E un EVN et $X \subset E$ une partie de E telle que, pour toute forme linéaire continue $\varphi \in E'$, l'ensemble $\varphi(X) \subset \mathbb{R}$ est borné.

a. À l'aide du principe de la borne uniforme, montrer l'existence d'une constante $M > 0$ telle que $|\varphi(x)| \le M \|\varphi\|$ pour tout $x \in X$ et toute $\varphi \in E'$.

b. En déduire que X est borné (en norme) dans E.

c. Soit $K \subset E$ une partie compacte pour la topologie faible. Montrer que K est bornée.

d. Le résultat précédent reste-t-il valable pour un compact préfaible dans le dual d'un EVN ?

Exercice 10. Soit E un $\mathbb{R}$-espace de Banach et $K \subset E$ une partie convexe, non vide, et faiblement compacte. Soit $T \in L'(E)$ un opérateur borné tel que $T(K) \subset K$. On veut montrer qu'il existe $x \in K$ tel que $T(x) = x$. Pour cela on note $T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} T^k$.

a. Montrer que $T_n(K)$ est un fermé faible contenu dans K pour tout n.

b. Montrer que $T_n T_m = T_m T_n$.
En déduire que $T_{n_1}(K) \cap \cdots \cap T_{n_p}(K)$ est non vide pour toute famille finie d'indices $n_1, \ldots, n_p$.

c. Montrer que $L = \bigcap_n T_n(K)$ est non vide. On fixe $x \in L$.

d. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on choisit $y \in K$ tel que $x = T_n(y)$. Calculer $T(x) - x$ en fonction de y.

e. Conclure. Le résultat est-il encore valable si K est seulement *préfaiblement* compacte dans le dual d'un EVN ?

Application : on considère $E = \ell^\infty(\mathbb{Z})'$, on prend pour K l'ensemble des formes linéaires continues $\varphi \in \ell^\infty(\mathbb{Z})'$ telles que $x \ge 0 \Rightarrow \varphi(x) \ge 0$ et $\varphi(1) = 1$, et pour T l'opérateur $T : \varphi \mapsto \varphi \circ S$ où $S : \ell^\infty(\mathbb{Z}) \to \ell^\infty(\mathbb{Z})$ est l'opérateur de décalage $\varphi(x) = (x_{k-1})_k$.

g. Montrer qu'il existe une « moyenne invariante » sur $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire une forme linéaire continue $M : \ell^\infty(\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}$ telle que $M(1) = 1$, $x \ge 0 \Rightarrow M(x) \ge 0$ et $M \circ S = M$.

h. Pour $A \subset \mathbb{Z}$ on pose $m(A) = M(\mathbb{1}_A) \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $m(\emptyset) = 0$, $m(\mathbb{Z}) = 1$ et $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ si $A \cap B = \emptyset$. L'application m est-elle une mesure ?

Exercice 11. Soit E un EVN et X une partie de E. On note $\bar{X}$ l'adhérence de X pour la topologie faible et $\tilde{X}$ l'ensemble des limites faibles de suites à valeurs dans X.

a. Montrer que si X est bornée alors $\tilde{X} = \bar{X}$. Montrer que si on considère la topologie normique à la place de la topologie faible alors $\tilde{X} = \bar{X}$. En général, l'un des sous-ensembles $\tilde{X}$, $\bar{X}$ est-il inclus dans l'autre ?

On prend maintenant $E = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et on considère les vecteurs $x^{n,m} = (x_i^{n,m})_i$ indexés par n, $m \in \mathbb{N}$ tels que $m > n$ et donnés par $x_i^{n,m} = \delta_{i,n} + n\delta_{i,m}$. On note $X = \{x^{n,m} \mid m > n\}$.

b. (i) Soit $y = (y_i)_i \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et $\epsilon > 0$ fixés. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|y_i| \le \epsilon/2$ pour tout $i \ge N$. Puis montrer qu'il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $|y_i| \le \epsilon/2N$ pour tout $i \ge M$.

(ii) Montrer que 0 appartient à $\bar{X}$.

c. Soit $(z_k)_k$ une suite dans X. On a ainsi $z_k = x^{n(k),m(k)}$ pour deux applications n, $m : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$. On suppose que $(z_k)_k$ tend faiblement vers 0.

(i) Montrer que l'application n prend un nombre infini de valeurs.
En déduire qu'il existe une suite $(t_k)_k$ de la forme $t_k = x^{k,m(k)}$ qui tend faiblement vers 0, avec $m : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ strictement croissante et telle que $m(k) > k$.

(ii) On définit une suite $y = (y_i)_i$ en posant $y_i = 0$ si $i \notin m(\mathbb{N}^*)$, et $y_{m(k)} = 1/k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que $y \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et déterminer $\lim_{k\infty}(y \mid t_k)$.

(iii) Conclure : a-t-on $0 \in \tilde{X}$?

d. Montrer que pour tout n le vecteur $y_n = (\delta_{i,n})_i$ appartient à $\tilde{X}$. A-t-on $\tilde{\tilde{X}} = \tilde{X}$?