Opérateurs

Exercice 1. Soit H un espace de Hilbert et $T \in L'(H)$.

a. À quelle condition sur T la forme sesquilinéaire $\varphi(x, y) = (x|Ty)$ est-elle hermitienne ?

b. Montrer que T est autoadjoint **ssi** $(x|Tx) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in H$.

c. Montrer que $T = 0$ **ssi** $(x|Tx) = 0$ pour tout $x \in H$. *On pourra utiliser* iT.

d. Les résultats des deux questions précédentes restent-il valables sur un espace de Hilbert réel ?

Exercice 2. Soit $T \in L'(H)$ un opérateur borné sur un espace de Hilbert H, et $T = U|T|$ sa décomposition polaire.

a. Trouver 2 matrices $U, S \in M_2(\mathbb{C})$ avec U unitaire, S positive inversible telles que $US \neq SU$. Quelle est la décomposition polaire de $T = US$? de T^* ? celle de $T' = SU$?

b. On suppose T normal.
   (i) Montrer que U commute à $|T|^2$.
   (ii) En déduire que U commute à $|T|$.
   (iii) Quelle est la décomposition polaire de T^* ?

c. On considère le cas où $H = \ell^2(\mathbb{N})$, muni de sa base canonique $(e_n)_n$, et $T(e_n) = e_{n+1}$.
Quelle est la décomposition polaire de T ? A-t-on $U|T| = |T|U$? T est-il normal ?

Exercice 3. Soit H un espace de Hilbert et $T \in L'(H)$ un opérateur tel que $\|T\| \leq 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $T_n = (\mathrm{Id} + T + T^2 + \cdots + T^n)/n$.
On note par ailleurs P la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id})$.

a. Montrer que $T(x) = x \Leftrightarrow (x|Tx) = \|x\|^2$.
En déduire que $\mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(T^* - \mathrm{Id})$.

b. Montrer que $\mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id})$ et $\overline{\mathrm{Im}}(T - \mathrm{Id})$ sont des supplémentaires orthogonaux dans H.

c. Montrer que pour tout $x \in H$ on a $\lim_{n\infty} T_n(x) = P(x)$.

Exercice 4. Soit (Ω, μ) un espace mesuré et $H = L^2(\Omega, \mu)$ muni de sa structure hilbertienne usuelle. On fixe $K \in L^2(\Omega \times \Omega, \mu \times \mu)$ et pour toute $f \in H$ on définit $T(f) \in H$ en posant

$$T(f)(s) = \int_\Omega K(s, t) f(t) \mathrm{d}\mu(t).$$

a. Montrer que T est un opérateur borné sur H et que $\|T\| \leq \|K\|_2$.

b. Déterminer l'adjoint T^* de T.

Pout $t \in \Omega$ fixé on note $K_t : \Omega \to \mathbb{C}$, $s \mapsto K(t, s)$. On fixe une base hilbertienne $(e_n)_n$ de H.

c. Montrer que $\|K\|_2^2 = \int_\Omega \|K_t\|_2^2 \mathrm{d}\mu(t) = \int_\Omega \sum_n |(\bar{e}_n|K_t)|^2 \mathrm{d}\mu(t)$.

d. Montrer que $\sum_n \|Te_n\|^2 = \|K\|_2^2 < +\infty$. On dit que T est un opérateur de Hilbert-Schmidt.
On pourra vérifier que $T(f)(s) = (\bar{f}|K_s)$.

e. Peut-on trouver un noyau $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$ tel que l'opérateur T associé soit inversible ?

Exercice 5. On considère $H = L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ muni du produit scalaire hermitien $(f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t) \mathrm{d}t$. On note K le sous-espace fermé engendré par les fonction $e_n : t \mapsto e^{int}$, $n \geq 0$ et P la projection orthogonale sur K.
Par ailleurs on note C l'espace des fonctions $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ continues et telles que $f(-\pi) = f(\pi)$. Pour $f \in C$ et $g \in K$ on note $T_f(g) = P(fg)$.

a. Montrer que T_f est un opérateur borné sur K.

b. Pour $i, j \in \mathbb{N}$ exprimer $(e_i|T_f e_j)$ à l'aide des coefficients de Fourier de f.
En déduire que $T_f = T_g \Rightarrow f = g$.

c. Montrer que $T_f^* = T_{\bar{f}}$.

Exercice 6. Soit E un espace de Banach non nul sur $\mathbb{C}$. Pour $T \in L'(E)$ on note $\rho(T) \subset \mathbb{C}$ l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $T - \lambda\mathrm{Id}$ est bijectif (ensemble résolvant de T) et $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ (spectre de T). Pour $\lambda \in \rho(T)$ on note $R_\lambda(T) = (T - \lambda\mathrm{Id})^{-1}$ (résolvant).

a. On suppose que $\|T\| < 1$. Montrer que $1 \in \rho(T)$ et exprimer $R_1(T)$ comme une série entière en T.

b. On suppose que $|\lambda| > \|T\|$. Montrer que $\lambda \in \rho(T)$ et que $\lim_{|\lambda|\to+\infty} \|R_\lambda(T)\| = 0$.

c. Montrer que pour tous $\lambda \in \rho(T)$, $h \in \mathbb{C}$ on a $T - (\lambda + h)\mathrm{Id} = (T - \lambda\mathrm{Id})(\mathrm{Id} - hR_\lambda(T))$.

d. Montrer que $\rho(T)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$. En déduire que $\sigma(T)$ est un compact de $\mathbb{C}$.

e. Montrons maintenant que $\sigma(T)$ est non vide. On procède par l'absurde et on suppose donc que $\rho(T) = \mathbb{C}$.

(i) En utilisant les questions a et c, écrire $R_{\lambda+h}(T)$ comme une série entière en h à coefficients dans $L'(E)$.

(ii) On fixe $\varphi \in E'$, $x \in E$ et on considère la fonction $f(\lambda) = \varphi(R_\lambda(T)x)$.
Montrer que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et tend vers 0 à l'infini.

(iii) Conclure.

Exercice 7. Soit X un espace topologique compact muni d'une mesure borélienne μ, et $H = L^2(\Omega, \mu)$ muni de sa structure hilbertienne usuelle. On fixe $f \in C(X, \mathbb{C})$ et on considère l'opérateur $M : H \to H$, $\xi \mapsto f\xi$.

a. Vérifier que M est borné et déterminer M^*.

b. On suppose que f ne s'annule pas. Montrer que M est inversible et déterminer M^{-1}.

c. On suppose que f s'annule en $t_0 \in X$.

(i) On fixe $\epsilon > 0$. Trouver une fonction $\xi \in H$ telle que $\|\xi\|_2 = 1$ et $\|M\xi\|_2 \leq \epsilon$.

(ii) Montrer par l'absurde que M n'est pas inversible.

d. Montrer que le spectre de T est égal à $f(X)$.

Exercice 8. On considère $H = \ell^2(\mathbb{N})$ muni de sa base canonique $(e_n)_n$ et l'opérateur $S : H \to H$ donné par $S(e_k) = e_{k+1}$.

a. Déterminer S^* et $\|S\|$.

b. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ l'application $S - \lambda\mathrm{Id}$ est injective.
Autrement dit S n'admet pas de valeur propre.

c. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > 1$. Monter que $S - \lambda\mathrm{Id}$ est inversible.

d. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| \leq 1$. Déterminer $(\mathrm{Im}\, S)^\perp$.

e. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$. On considère $x_n = (n+1)^{-1/2} \sum_{k=0}^{n} \lambda^{-k} e_k$.

(i) Montrer que $\lim_{n\infty}(S(x_n) - \lambda x_n) = 0$.

(ii) Montrer que $S - \lambda\mathrm{Id}$ n'est pas bijective.

f. Déterminer le spectre de S.

Exercice 9. Soit $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $t \leq s \Rightarrow K(s,t) = 0$.
On considère $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme et on définit $T : E \to E$ en posant

$$T(f)(s) = \int_0^1 K(s,t) f(t) \mathrm{d}t.$$

a. Montrer que T est un opérateur borné.

b. Montrer qu'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f \in E$ et $x \in [0,1]$:

$$|T^n(f)(x)| \leq \|f\|_\infty \frac{\|K\|_\infty^n x^n}{n!}.$$

c. Montrer que $T - \mathrm{Id}$ est inversible et $(T - \mathrm{Id})^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} T^n$.

d. Montrer que le spectre de T est réduit à $\{0\}$.