Espaces Fonctionnels
Examen UAGR2AT
13 avril 2016

Durée : 3 heures. Aucun document ni calculatrice n'est autorisé.
Les 4 exercices sont indépendants.
La notation tiendra compte de la qualité de la rédaction.

Exercice 1. Soit E, F des espaces de Banach non nuls, $S \in L'(E, F)$. On pose $E_0 = \mathrm{Ker}(S) \subset E$.

1. On suppose qu'il existe $T \in L'(F, E)$ tel que $S \circ T = \mathrm{Id}$.
   (a) Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel qu'on ait $\|T(y)\| \geq \epsilon \|y\|$ pour tout $y \in F$.
   En déduire que $\mathrm{Im}(T)$ est fermée.
   (b) *Question d'algèbre.* Montrer que S est surjective et que $\mathrm{Im}(T)$ est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(S)$.
2. On ne suppose plus l'existence d'un inverse à droite T.
   On suppose que S est surjective et que $E_0 = \mathrm{Ker}(S)$ admet un supplémentaire fermé $E_1 \subset E$.
   On note $S_1 : E_1 \to F$ la restriction de S à E_1.
   (a) Montrer que S_1 est une bijection et que la bijection réciproque est continue.
   (b) Montrer qu'il existe $T \in L'(F, E)$ telle que $S \circ T = \mathrm{Id}$.

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. On munit $E \times E$ de la norme $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$.
Soit $K \subset E$ un compact convexe non vide.
Soit $f : K \to K$ une application continue. On suppose de plus que f est *affine*, c'est-à-dire que pour tous x, $x' \in K$ et $\lambda \in [0, 1]$ on a $\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(x') = f(\lambda x + (1 - \lambda) x')$.
On note $G(f) \subset K \times K$ le graphe de f, et on considère également $D = \{(x, x) \mid x \in K\} \subset K \times K$.
Le but de l'exercice est de montrer que f admet un point fixe, et on procède par l'absurde. On suppose donc que f n'admet pas de point fixe.

1. Montrer que $G(f)$ et D sont des convexes compacts de $E \times E$.
   On notera que E n'est pas nécessairement de dimension finie.
2. Montrer qu'il existe une forme linéaire continue $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ et α, $\beta \in \mathbb{R}$ tels que
   $\varphi(x, x) \leq \alpha < \beta \leq \varphi(x', f(x'))$ pour tous x, $x' \in K$.
3. Montrer qu'il existe deux formes linéaires continues φ_1, $\varphi_2 : E \to \mathbb{R}$ telles que
   $\varphi(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2)$ pour tous x_1, $x_2 \in E$.
4. Montrer que pour tout $x \in K$ on a $\varphi_2(f(x)) - \varphi_2(x) \geq \beta - \alpha$.
   Montrer que pour tout $x \in K$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\varphi_2(f^n(x)) - \varphi_2(x) \geq n(\beta - \alpha)$.
5. Conclure.

suite au verso

Exercice 3. On considère l'espace $H = L^2([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$. On note $L'(H)$ l'espace des applications linéaires continues de H dans H, muni de la norme d'opérateur.
Pour toute fonction $K \in L^2([0,1]^2, \mathbb{R})$, on considère l'*opérateur à noyau* associé $T : H \to H$, donné par la formule

$$T(f)(s) = \int_0^1 K(s,t) f(t) \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que T est une application linéaire continue et que $\|T\| \leq \|K\|_2$.
2. Montrer que l'adjoint T^* de T est un opérateur à noyau.
   On précisera quel est le noyau $K^* : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ correspondant à T^*.
3. Soit T_1, T_2 les opérateurs à noyaux associés à deux fonctions K_1, $K_2 \in C([0,1]^2, \mathbb{R})$.
   Montrer que $T_3 = T_1 \circ T_2$ est encore un opérateur à noyau. *On exprimera la fonction K_3 correspondante comme une intégrale à paramètres faisant intervenir K_1 et K_2.*
4. On considère le cas où $K_1(s,t) = t^s$ et $K_2(s,t) = s^t$, en convenant que $0^0 = 0$.
   Calculer le noyau K_3 correspondant à $T_1 \circ T_2$.
5. On considère le noyau $K : (s,t) \mapsto (s+t+1)^{-1}$.
   Montrer que l'opérateur à noyau T associé à K est un opérateur positif.

Exercice 4. *(Écrit agreg 2013, partie IV, extrait)*
Pour tout segment $S = [a,b] \subset [0,1]$ on considère l'espace de fonctions continues $E_S = C(S, \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme sur S notée $\|f\|_S = \sup_{t \in S} |f(t)|$.
On considère un sous-espace *fermé* $F \subset E_S$ tel que toutes les fonctions $f \in F$ sont de classe C^1 sur S.
Pour $x \neq y$ dans S et $f \in E_S$ on pose $\varphi_{x,y}(f) = (f(x) - f(y))/(x-y)$.

1. Montrer que $\varphi_{x,y}$ est une forme linéaire continue sur E_S.
2. Montrer que pour $f \in F$ fixée l'ensemble $\{\varphi_{x,y}(f) \mid x, y \in S, x \neq y\}$ est borné dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute $f \in F$ et tous $x \neq y$ dans S on ait
   $$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y| \, \|f\|_S.$$
4. On fixe des points $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_l = b$ tels que $|t_{k+1} - t_k| \leq C^{-1}$ pour tout k.
   Montrer que pour toute $f \in F$ on a $\sup_{t \in S} |f(t)| \leq \max_k |f(t_k)| + \frac{1}{2}\|f\|_S$.
5. Montrer que F est de dimension finie.