Interrogation n° 2

Question de cours. *(2pts)*

a. Vérifier que la fonction $x(t) = e^{t^2+t}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $x'(t) = (2t+1)x(t)$.

b. Montrer que si $x(t)$ satisfait $x'(t) = (2t+1)x(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors il existe une constante A telle que $x(t) = Ae^{t^2+t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. *On pourra considérer la fonction* $y(t) = x(t)e^{-t^2-t}$.

Exercice 1. *(6pts)*
Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes, en justifiant la réponse :

$$I = \int_1^{+\infty} \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x, \qquad J = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sin(x)+x^2}\mathrm{d}x, \qquad K = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x}\mathrm{d}x.$$

Exercice 2. *(3pts)* Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $x' + 2tx = 2t$.