Partiel du 3 novembre

Durée : 2h. Documents et calculatrices non autorisés.
Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité.

Exercice 1. Déterminer et justifier la nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$

Exercice 2.

1. Déterminer un équivalent simple de $t-\sin(t)$ en 0.
2. Montrer que $t\ln(t)+\sqrt{t} \sim \sqrt{t}$ en 0^+.
3. Déterminer la nature de l'intégrale généralisée suivante :
   (On admet que $t-\sin(t)$ ne s'annule qu'en 0.)

$$I = \int_0^1 \frac{t\ln(t)+\sqrt{t}}{t-\sin t}\mathrm{d}t.$$

Exercice 3. On pose

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{2n}}, \qquad R_n = \mathrm{Re}(S_n), \qquad I = \int_0^1 \cos\left(\tfrac{\pi}{2}t\right)\mathrm{d}t.$$

1. Quel est le lien entre la suite $(R_n)_n$ et l'intégrale I ?
2. Calculer S_n sans le symbole somme.
3. Montrer que pour $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$ on a $\mathrm{Re}\left(\frac{1-i}{1-e^{i\theta}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\theta}{2-2\cos\theta}$.
4. En déduire la valeur de I sans utiliser la primitive de la fonction cosinus.

Exercice 4. On considère les équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{(E)} & |t|x' - x = 0 \\ \text{(F)} & |t|x' - x = \sin t. \end{array}$$

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, puis sur $\mathbb{R}_-^*$.
   On notera que $|t| = -t$ pour $t \leq 0$.
2. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$ entier.
3. (a) Résoudre (F) sur $\mathbb{R}_-^*$.
   (b) Montrer que (F) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_-^*$ prolongeable par continuité en 0.
4. On note G la primitive de $\frac{\sin t}{t^2}$ nulle en 1, qu'on ne cherchera pas à calculer explicitement.
   (a) Résoudre (F) sur $\mathbb{R}_+^*$, en utilisant G.
   (b) La fonction G a-t-elle une limite finie en 0^+ ?
   (c) Montrer que $|G(t)| \leq |\ln t|$ pour tout $t \in]0,1]$.
   On pourra utiliser l'inégalité $|\sin t| \leq |t|$ valable sur $\mathbb{R}$.
   (d) Montrer que toutes les solutions de (F) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont prolongeables par continuité en 0.
5. Question subsidiaire : déterminer si (F) a des solutions sur $\mathbb{R}$ entier.