Espaces Fonctionnels
Partiel du 1er mars 2017

Durée : 2 heures. Aucun document ni calculatrice n'est autorisé.
Les 4 exercices sont indépendants.
La notation tiendra compte de la longueur du sujet, et également de la qualité de la rédaction.

Exercice 1. On considère une série de fonctions $(\sum_{k\in\mathbb{N}^*} f_k)$ avec $f_k \in C([0,1],\mathbb{R})$ pour tout k. On suppose que la série converge simplement sur $[0,1]$. On note $S_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ les sommes partielles et $S : x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ la somme de la série.

1. On suppose que les fonctions f_k sont à *valeurs positives* et que S est continue sur $[0,1]$.
   Montrer que $(S_n)_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.
2. On considère le cas où $f_k(t) = \frac{1}{k}(t^k - t^{k+1})$.
   Calculer S et montrer que la série de fonctions $(\sum f_k)$ converge uniformément sur $[0,1]$.
3. On considère le cas où $f_k(t) = -t^k \ln(t)$, $f(0) = 0$.
   La série $(\sum f_k)$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel normé et $T \in L'(E)$ une application linéaire continue.
Pour tout nombre complexe λ on note $E_\lambda(T) = \{x \in E \mid T(x) = \lambda x\}$.
On note $B = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ la boule unité fermée de E et $\lambda B = \{\lambda x \mid x \in B\} = \{x \in E \mid \|x\| \leq |\lambda|\}$.

On suppose que l'adhérence de $T(B)$ dans E est compacte et on fixe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

1. Montrer que $\lambda B \cap E_\lambda(T) \subset T(B)$.
2. Montrer que $B \cap E_\lambda(T)$ est compact.
3. Montrer que le sous-espace propre $E_\lambda(T)$ est de dimension finie.

Exercice 3. Soit $K \in C([0,1]^2,\mathbb{R})$. On considère l'opérateur à noyau $T : C([0,1],\mathbb{R}) \to C([0,1],\mathbb{R})$ associé à K, c'est-à-dire donné par la formule

$$T(f)(s) = \int_0^1 K(s,t) f(t) \mathrm{d}t,$$

pour $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ et $s \in [0,1]$. On admet que $T(f)$ est bien un élément de $C([0,1],\mathbb{R})$.
On munit $[0,1]$ de la distance usuelle et $[0,1]^2$ de la distance $d((s,t),(s',t')) = \max(|s-s'|,|t-t'|)$.
On munit $C([0,1],\mathbb{R})$ et $C([0,1]^2,\mathbb{R})$ de la norme du sup, notée $\|\cdot\|_\infty$.

1. Rappeler les théorèmes (et notamment leurs hypothèses) qui permettent d'affirmer :
   — que K est bornée sur $[0,1]^2$,
   — que K est uniformément continue sur $[0,1]^2$.
2. Montrer que l'application linéaire T est continue.
3. On fixe $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel qu'on ait $|T(f)(s) - T(f)(s')| \leq \epsilon \|f\|_\infty$ pour toute $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ et tous s, $s' \in [0,1]$ tels que $|s-s'| \leq \alpha$.
4. On note $B = \{f \in C([0,1],\mathbb{R}) \mid \|f\|_\infty \leq 1\}$ la boule unité fermée de $C([0,1],\mathbb{R})$.
   Montrer que l'adhérence de $T(B)$ dans $C([0,1],\mathbb{R})$ est compacte.
   On pourra appliquer le théorème d'Ascoli.

Suite au verso

Exercice 4. On considère l'espace $E = \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ muni de la norme $\|x\|_1 = \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|$.
Soit $(x_k)_k$ une suite d'éléments de E : on a ainsi $x_k = (x_{k,i})_i$ pour k fixé. On suppose que $(x_k)_k$ tend faiblement vers 0, et on va montrer qu'il y a en fait convergence en norme vers 0. Pour cela on procède par l'absurde : quitte à extraire une sous-suite, cela revient à supposer que $(x_k)_k$ tend faiblement vers 0 et qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\|x_k\|_1 > \epsilon$ pour tout k.

1. Montrer que pour i fixé on a $\lim_{k\infty} x_{k,i} = 0$.
2. On fixe K, $A \in \mathbb{N}$.
   Montrer qu'il existe $k > K$ et $\alpha > A$ tels que $\sum_{i=0}^{A} |x_{k,i}| \leq \epsilon/5$ et $\sum_{i=\alpha+1}^{\infty} |x_{k,i}| \leq \epsilon/5$.

On peut donc construire par récurrence une suite $(y_l)_l$ extraite de $(x_k)_k$ et une suite strictement croissante d'indices $(\alpha_l)_l$ telles que $\sum_{i=0}^{\alpha_l} |y_{l,i}| \leq \epsilon/5$ et $\sum_{i=\alpha_{l+1}+1}^{\infty} |y_{l,i}| \leq \epsilon/5$. On ne demande pas de rédiger cette construction.

3. Montrer que pour tout l on a $\sum_{i=\alpha_l+1}^{\alpha_{l+1}} |y_{l,i}| \geq 3\epsilon/5$.

Pour tout réel x on note $\mathrm{sgn}(x) = 1$ si $x \geq 0$, $\mathrm{sgn}(x) = -1$ si $x < 0$. Pour tout entier i il existe un unique indice l tel que $\alpha_l + 1 \leq i \leq \alpha_{l+1}$, et on note alors $s_i = \mathrm{sgn}(y_{l,i})$.

4. Montrer que la formule $\varphi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i z_i$ définit une forme linéaire continue sur E.
5. Montrer que pour tout l on a $|\varphi(y_l)| \geq \epsilon/5$. Conclure.

Les suites convergentes sont donc les mêmes pour la topologie faible et pour la topologie normique sur $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. C'est bien sûr une propriété très particulière à l'espace ℓ^1. Cela n'implique pas que les deux topologies sont égales (car la seconde n'est pas métrisable).