Compacité

Exercice 1. Soit $(F_n)_n$ une suite de fermés emboîtés non vides dans un espace topologique compact X. On note $F = \bigcap_n F_n$. Soit O un ouvert tel que $F \subset O$. Montrer qu'il existe n tel que $F_n \subset O$.
Indication : on pourra poser $O_n = O \cup {}^cF_n$.

Exercice 2. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|(m_{ij})_{ij}\| = \max_{ij} |m_{ij}|$. On note $O_n \subset M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales. Montrer que O_n est compact.

Exercice 3. Soit E un EVN. On note B la boule unité fermée de E et S la sphère unité de E. Montrer que B est compacte si et seulement si S est compacte. Pour quels espaces E la sphère S est-elle compacte ?

Exercice 4. On fixe un $\mathbb{R}$-EVN de dimension finie E, et des normes sur E et $L(E)$.

a. On fixe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v \in E$. Montrer que $F = \{f \in L(E) \mid f(v) = \lambda v\}$ est fermé.

b. On fixe $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $G = \{f \in L(E) \mid \exists v \neq 0 \; f(v) = \lambda v\}$ est fermé.

Exercice 5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

a. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction qu'on calculera.

b. On fixe $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(f_n(x))_n$ est croissante à partir d'un certain rang.
On pourra étudier les variations de $\ln f_{n+1} - \ln f_n$.

c. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Exercice 6. On définit une suite de fonctions $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ par récurrence en posant, pour tout $t \in [0, 1]$: $f_0(t) = 0$ et $f_{n+1}(t) = f_n(t) + \frac{1}{2}(t - f_n(t)^2)$.

a. On fixe $t \in [0, 1]$. Étudier la suite récurrente $(f_n(t))_n$.
On montrera notamment qu'elle est croissante et converge vers un réel $g(t)$ que l'on calculera.

b. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers g.

Exercice 7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, t \mapsto 1 - (1 - t)^n$.

a. Montrer que la suite $(f_n)_n$ est croissante est converge simplement.

b. Montrer que chaque fonction f_n est croissante et continue.

c. La suite $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

d. Soit $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue, nulle en 0 et positive. Montrer que la suite $(gf_n)_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

e. Soit $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue et nulle en 0. Montrer que le résultat précédent reste vrai.
On pourra considérer $\max(g, 0)$ *et* $\min(g, 0)$.

f. Soit $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ bornée telle que $g(0) = \lim_0 g = 0$. Montrer que le résultat précédent reste vrai.

Exercice 8.

a. Soit X, Y des espaces métriques compacts et $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et des fonctions continues $f_1, \ldots, f_n : X \to \mathbb{R}$, $g_1, \ldots, g_n : Y \to \mathbb{R}$ telles qu'on ait $|h(x, y) - \sum_{i=1}^n f_i(x)g_i(y)| \leq \epsilon$ pour tout $(x, y) \in X \times Y$.

b. Montrer que toute fonction continue $h : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ est limite uniforme de fonctions polynomiales.

Exercice 9. Soit $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ le disque unité fermé dans $\mathbb{C}$. On note $A \subset C(D, \mathbb{C})$ le sous-espace des fonctions polynômiales $f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ (avec $a_k \in \mathbb{C}$) et on munit $C(D, \mathbb{C})$ de la norme du sup.

a. Montrer que A est une sous-algèbre unifère de $C(D, \mathbb{C})$ qui sépare les points.

b. Montrer que l'application $\varphi : f \mapsto (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(e^{it})\mathrm{d}t$ est continue sur $C(D, \mathbb{C})$.

c. Montrer que pour tout $f \in A$ on a $\varphi(f) = f(0)$.

d. Montrer que A n'est pas dense dans $C(D, \mathbb{C})$.

e. Quelle hypothèse faut-il rajouter au théorème de Stone-Weierstraß dans le cas de fonctions à valeurs complexes ?

Exercice 10. Soit X un espace métrique et $f_n \in C(X,\mathbb{R})$ une suite décroissante de fonctions qui converge simplement vers la fonction nulle.

a. (i) On fixe $x \in X$ et $\epsilon > 0$. On suppose que $f_n(x) \leq \epsilon/2$.
Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $f_p(y) \leq \epsilon$ pour tout $p \geq n$ et tout $y \in X$ tel que $d(x,y) \leq \alpha$.

(ii) Montrer que la suite $(f_n)_n$ est équicontinue.

b. On suppose de plus que X est compact.
À l'aide d'un lemme du cours, montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément.

Exercice 11. On considère l'espace $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$, et l'espace $F = C^1([0,1],\mathbb{R})$ de muni de la norme $N : f \mapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. On fixe un sous-espace $V \subset E \cap F$ fermé dans E.

a. Montrer que V est fermé dans F. Montrer que $\mathrm{Id} : (V,N) \to (V, \|\cdot\|_\infty)$ est continue.
D'après le théorème des isomorphismes de Banach, l'application réciproque est également continue.

b. Montrer que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N sont équivalentes sur le sous-espace V.

c. On note $\bar{B}$ la boule unité fermée de V relativement à la norme $\|\cdot\|_\infty$.
Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que toutes les fonctions $f \in \bar{B}$ sont lipschitziennes de rapport C.

d. Montrer que $\bar{B}$ est équicontinue.

e. Montrer que V est nécessairement de dimension finie.

Exercice 12. On travaille dans l'EVN $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. On considère l'application linéaire $I : E \to E$ qui à $f \in E$ associe la primitive F de f nulle en 0.

a. Donner une formule intégrale pour $I(f)(t)$, $f \in E$, $t \in [0,1]$. Montrer que I est continue.

b. On note B la boule unité ouverte de E. Montrer que $I(B)$ est équicontinue.

c. Soit $(f_n)_n$ une suite bornée de fonctions dans E et $F_n = I(f_n)$.
Montrer que $(F_n)_n$ admet une sous-suite convergente.

Exercice 13. Soit X, Y des espaces métriques. On munit $X\times Y$ de la distance $d((x,y),(x',y')) = \max(d(x,y), d(x',y'))$. On fixe une application $F : X\times Y \to \mathbb{R}$ continue, et pour tout $y \in Y$ on note F_y l'application $F_y : X \to \mathbb{R}, x \mapsto F(x,y)$. On note enfin $\mathcal{F} \subset C(X,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions F_y et on munit $C(X,\mathbb{R})$ de la norme du sup.

a. On fixe $x \in X$ et $\epsilon > 0$.
Montrer que pour tout $y \in Y$ il existe $\alpha_y > 0$ tel que $d((x,y),(x',y')) \leq \alpha_y \Rightarrow |F(x,y) - F(x',y')| \leq \epsilon/2$.
Montrer que $\{B_Y(y,\alpha_y), y \in Y\}$ est un recouvrement ouvert de Y.

b. On suppose que Y est compact.
Déduire de la question précédente l'existence de $\alpha > 0$ tel que $d(x,x') \leq \alpha \Rightarrow \forall y'\ |F(x,y') - F(x',y')| \leq \epsilon$.
Montrer que $\mathcal{F}$ est équicontinue.

c. On suppose de plus que X est compact. Montrer que l'adhérence de $\mathcal{F}$ dans $C(X,\mathbb{R})$ est compacte.

d. On suppose toujours que X et Y sont compacts. À l'aide du théorème de Heine, montrer que l'application $(y \mapsto F_y)$ est continue de Y dans $C(X,\mathbb{R})$. En déduire que $\mathcal{F}$ est compact.

Exercice 14. Soit E un $\mathbb{R}$-EVN et $K \subset E$ une partie compacte, convexe, non vide. Soit $T \in L'(E)$ une application linéaire (ou affine) continue telle que $T(K) \subset K$. On veut montrer qu'il existe $x \in K$ tel que $T(x) = x$. Pour cela on note $T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T^k$.

a. Montrer que $T_n(K)$ est un fermé contenu dans K pour tout n.

b. Montrer que $T_nT_m = T_mT_n$.
En déduire que $T_{n_1}(K) \cap \cdots \cap T_{n_p}(K)$ est non vide pour toute famille finie d'indices $n_1, \ldots, n_p$.

c. Montrer que $L = \bigcap_n T_n(K)$ est non vide. On fixe $x \in L$.

d. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on choisit $y \in K$ tel que $x = T_n(y)$. Calculer $T(x) - x$ en fonction de y. Conclure.

e. Le résultat est-il encore valable si K est faiblement compact et T est continu pour la topologie faible ?
Et avec la topologie préfaible ? *On pourra admettre qu'un compact (pré)faible est automatiquement borné.*

Application : on considère $E = \ell^\infty(\mathbb{Z})'$, on prend pour K l'ensemble des formes linéaires continues $\varphi \in \ell^\infty(\mathbb{Z})'$ telles que $x \geq 0 \Rightarrow \varphi(x) \geq 0$ et $\varphi(1) = 1$, et pour T l'opérateur $T : \varphi \mapsto \varphi \circ S$ où $S : \ell^\infty(\mathbb{Z}) \to \ell^\infty(\mathbb{Z})$ est l'opérateur de décalage $\varphi(x) = (x_{k-1})_k$.

g. Montrer qu'il existe une « moyenne invariante » sur $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire une forme linéaire continue $M : \ell^\infty(\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}$ telle que $M(1) = 1$, $x \geq 0 \Rightarrow M(x) \geq 0$ et $M \circ S = M$.

h. Pour $A \subset \mathbb{Z}$ on pose $m(A) = M(\mathbb{1}_A) \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $m(\emptyset) = 0$, $m(\mathbb{Z}) = 1$ et $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ si $A \cap B = \emptyset$. L'application m est-elle une mesure ?