Université de Caen — UFR Sciences — L2 Maths

1er semestre 2016-2017 — Mathématiques — Analyse

Équations différentielles

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes.

a. $x' + 2x = t^2 - 2t + 3,$ $\qquad \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{9}{4} + Ce^{-2t}$

b. $7x' + 2x = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 1,$ $\qquad t^3 - 13t^2 + 93t - 326 + Ce^{-\frac{2}{7}t}$

c. $x' + x = te^{-t},$ $\qquad (\frac{1}{2}t^2 + C)e^{-t}$

d. $x' - 2x = \cos t + 2\sin t.$ $\qquad -\frac{4}{5}\cos t - \frac{3}{5}\sin t + Ce^{2t}$

e. $x' + x = t - e^t + \cos t.$ $\qquad t - 1 + \frac{1}{2}(\cos t + \sin t - e^t) + Ce^{-t}$

On commencera par résoudre les équations sans second membre.
Puis on cherchera une solution particulière de même forme que le second membre.

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes.

a. $x'' - 4x' + 4x = 0,$ $\qquad (Ct + D)e^{2t}$

b. $x'' - 4x' + 5x = 0,$ $\qquad (C\cos t + D\sin t)e^{2t}$

c. $x'' + 2x' + 5x = 0,$ $\qquad (C\cos 2t + D\sin 2t)e^{-t}$

d. $x'' - 2x' - 3x = t^2,$ $\qquad Ce^{-t} + De^{3t} + (-9t^2 + 12t - 14)/27$

e. $x'' + x' - 2x = 6(e^t - e^{-t}),$ $\qquad (2t + C)e^t + 3e^{-t} + De^{-2t}$

f. $x'' + x' - 6x = 5e^{2t} - t - 1,$ $\qquad Ce^{2t} + De^{-3t} + t(e^{2t} - 1)$

g. $x'' - x' - 2x = \cos t,$ $\qquad Ce^{-t} + De^{2t} - (3\cos t + \sin t)/10$

h. $x'' + 4x = e^t + \cos(2t).$ $\qquad C\cos(2t) + (D + t/4)\sin(2t) + e^t/5$

Exercice 3. Résoudre les équations différentielles suivantes.
On donnera également la solution vérifiant la condition initiale $x(0) = 0$.

a. $x + 4x = 0,$

b. $2x' - 3x = 0,$

c. $x' + x = \frac{1}{1+e^t},$ $\qquad (C + \ln(1 + e^t))e^{-t}$

d. $x' + x = e^t - 1,$ $\qquad Ce^{-t} + \frac{1}{2}e^t - 1$

e. $x' + 2x = \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-2t},$ $\qquad (C + 2\sqrt{t})e^{-2t}$

f. $x' + 2x = \frac{2t-1}{t^2},$ $\qquad Ce^{-2t} + \frac{1}{t}$

On commencera par résoudre les équations sans second membre.
Puis on utilisera la méthode de variation de la constante.

Exercice 4. Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $t^2x' - x = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*,$ $\qquad Ce^{-\frac{1}{t}}$

b. $(t\ln t)x' - x = 0$ sur $]1, +\infty[,$ $\qquad C\ln t$

c. $x' - \frac{1}{t}x = t^2$ sur $\mathbb{R}_+^*,$ $\qquad Ct + \frac{1}{2}t^3$

d. $x' - \frac{2}{t}x = t^2$ sur $\mathbb{R}_+^*,$ $\qquad Ct^2 + t^3$

e. $(t + 1)x' + tx = t^2 - t + 1$ sur $]-1, +\infty[,$ $\qquad C(t + 1)e^{-t} + t - 2$

f. $x' - 2tx = -(2t - 1)e^t,$ $\qquad Ce^{t^2} + e^t$

g. $(1 + t)x' + x = 1 + \ln(1 + t)$ sur $]-1, +\infty[,$ $\qquad \ln(1 + t) + C/(1 + t)$

h. $x' + (\tan t)x = (\cos t)^{-1}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$ $\qquad \sin t + C\cos t$

On commencera par résoudre les équations sans second membre en calculant une primitive.
Puis on utilisera la méthode de variation de la constante.

Exercice 5. Pour $t > 1$ on pose

$$g(t) = \frac{1+t}{t(1-t)}, \quad h(t) = \frac{1}{\sqrt{t}(t-1)}, \quad k(t) = \frac{\sqrt{t}}{(t-1)^2}.$$

a. Déterminer les réels a, b tels que $g(t) = \frac{a}{t} + \frac{b}{1-t}$ pour tout $t > 1$. $(1, 2)$
En déduire une primitive de g sur $]1, +\infty[$. $\ln(t) - 2\ln(t-1)$

b. À l'aide d'un changement de variable, déterminer une primitive de h.
On pourra utiliser l'identité $\frac{2}{t^2-1} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}$. $\ln(\sqrt{t}-1) - \ln(\sqrt{t}+1)$

c. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de k. $-\sqrt{t}/(t-1) + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{t}+1) - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{t}+1)$

d. À l'aide des questions précédentes, résoudre sur $]1, +\infty[$ l'équation différentielle $2t(1-t)x' + (1+t)x = t$.
$\frac{1}{2} + \frac{t-1}{\sqrt{t}}(C + \frac{1}{4}\ln(\sqrt{t}+1) - \frac{1}{4}\ln(\sqrt{t}-1))$ On commencera par l'équation sans second membre. $C\frac{t-1}{\sqrt{t}}$

Exercice 6. On considère l'équation différentielle $t^2x' - x = 0$ définie sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ sont de la forme $f_A(t) = Af_1(t)$, avec f_1 une fonction à déterminer.

b. Montrer que les solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ sont de la forme $g_B(t) = Bg_1(t)$, avec g_1 une fonction à déterminer.

c. On considère la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $h(t) = g_B(t)$ pour $t < 0$, $h(0) = C$, $h(t) = f_A(t)$ pour $t > 0$.
À quelles conditions sur A, B, C la fonction h est-elle continue en 0 ? $B = C = 0$
Montrer qu'alors h est dérivable en 0 et déterminer $h'(0)$.

d. Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ entier. *$x = 0$ sur $\mathbb{R}_-$ et $e^{-1/t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$*

Exercice 7. On considère l'équation différentielle $tx' - 2x = t^3$ définie sur $\mathbb{R}$.

a. Déterminer l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$, et celui sur $\mathbb{R}_-^*$.

b. Montrer que l'on peut toujours recoller une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et une solution sur $\mathbb{R}_-^*$ pour obtenir une solution définie sur $\mathbb{R}$ entier.

c. Quelle est la dimension de l'espace des solutions sur $\mathbb{R}$? *$x = t^3 + At^2$ sur $\mathbb{R}_-$, $t^3 + Bt^2$ sur $\mathbb{R}_+$*

Exercice 8. *(Partiel 2014)*
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ si $t \neq 0$ et $f(0) = 1$.

a. La fonction f est-elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en 0 ?

On considère l'équation différentielle (E) : $tx' + x = \cos t$, d'inconnue $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. $\frac{\sin t}{t} + \frac{C}{t}$

c. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$. $\frac{\sin t}{t}$

Exercice 9.

a. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et telles que $-D(1 + 1/e) + De^{-t}$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f'(t) + f(t) = f(0) + f(1).$$

b. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et telles que *constantes*

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f'(t) + f(t) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 10.

a. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $|g(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \geq M$.
Montrer que pour tout $x \geq M$ on a

$$\left| e^{-x} \int_M^x e^t g(t)\mathrm{d}t \right| \leq \varepsilon.$$

b. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\lim_{x\to+\infty}(f(x) + f'(x)) = 0$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.