Université de Caen
UFR Sciences
M1 Maths

2e semestre 2016-2017
Mathématiques
Espaces fonctionnels

Espaces de Banach

Exercice 1. On dit qu'un espace métrique X est un *espace de Baire* si pour toute suite d'ouverts denses $U_n \subset X$, l'intersection $\bigcap_n U_n$ est encore dense dans X. Ainsi, les espaces complets sont des espaces de Baire.

a. Montrer qu'un ouvert d'un espace de Baire est un espace de Baire. Montrer que l'intersection d'une suite d'ouverts denses d'un espace de Baire est encore un espace de Baire.

b. Les espaces $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, munis de la restriction de la distance usuelle de $\mathbb{R}$, sont-ils des espaces de Baire ?

c. Montrer que $(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}) \cup (\{0\} \times \mathbb{Q})$, muni de la restriction de la distance usuelle de $\mathbb{R}^2$, est un espace de Baire. Une partie fermée d'un espace de Baire est-elle nécessairement un espace de Baire ? Que dire des parties fermées d'un espace complet ?

Exercice 2. Soit X un espace métrique complet et $(f_n)_n$ une suite de fonctions *continues* de X dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction $f : X \to \mathbb{R}$. On sait qu'en général f n'est pas continue. On va montrer cependant que les points $x \in X$ où f est continue forment une partie dense de X. Pour ce faire on considère les sous-ensembles $F_{\epsilon,n} \subset X$ definis, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$F_{\epsilon,n} = \{x \in X \mid \forall p \geq n \ \ |f_p(x) - f_n(x)| \leq \epsilon\}.$$

a. Montrer que les parties $F_{\epsilon,n}$ sont fermées dans X.

b. On fixe $\epsilon > 0$.
   (i) Montrer que la réunion des $F_{\epsilon,n}$, lorsque n parcourt $\mathbb{N}$, est égale à X.
   (ii) Montrer que $U_\epsilon = \bigcup_n F_{\epsilon,n}^\circ$ est un ouvert dense de X.

c. On considère $C = \bigcap_{\epsilon>0} U_\epsilon$.
   (i) Écrire l'assertion « $x \in C$ » avec des quantificateurs, sans utiliser les sous-ensembles $F_{\epsilon,n}$. Qu'obtient-on en faisant tendre p vers $+\infty$ dans cette assertion ?
   (ii) Écrire la définition de la continuité de f_n en x. Montrer que f est continue en x.

d. Conclure.

e. Application. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que les points où f' est continue forment une partie dense de I.

Exercice 3. On munit $E = \mathcal{C}([0,1])$ de la norme de la convergence uniforme et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère le sous-ensemble suivant de E :

$$U_n = \{f \in E \mid \forall x \in [0,1] \quad \exists y \in [0,1] \quad |f(x) - f(y)| > n|x - y|\}.$$

a. Montrer que U_n est un ouvert dense de E. *On admettra que toute fonction continue sur* $[0,1]$ *est limite uniforme de fonctions affines par morceaux dont les pentes sont plus grandes que* n *en valeur absolue.*

b. Montrer qu'il existe une partie dense de $\mathcal{C}([0,1])$ dont les éléments ne sont dérivables en aucun point de $[0,1]$.

Exercice 4. Soit E un espace de Banach.

a. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E distinct de E. Montrer que F ne contient aucune des boules $B(0,r)$, pour $r > 0$. Montrer que F est d'intérieur vide.

b. On suppose que E est réunion de sous-espaces fermés F_n. Montrer qu'il existe n tel que $E = F_n$.

c. Montrer qu'un espace de Banach de dimension infinie n'admet pas de base (algébrique) dénombrable.

Exercice 5. Soit E un espace de Banach, décomposé sous la forme $E = F \oplus G$. On note p la projection sur F parallèlement à G.

a. Exprimer F et G à l'aide de p. En déduire que si p est continue, F et G sont fermés.

b. À l'aide du théorème du graphe fermé, montrer que si F et G sont fermés alors p est continue.

Exercice 6. *(Partiel 2016)* Soit E, F des espaces de Banach et $S \in L'(E,F)$ une application linéaire continue.

a. On suppose qu'il existe $T \in L'(F,E)$ telle que $T \circ S = \mathrm{Id}$.
   (i) Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $\|S(x)\| \geq M\|x\|$.
   (ii) Montrer que S est injective et que $\operatorname{Im} S$ est fermée.
   (iii) Montrer que $\operatorname{Ker} T$ est un supplémentaire fermé de $\operatorname{Im} S$.

b. On suppose maintenant que S est injective, que $\operatorname{Im} S$ est fermée, et que $\operatorname{Im} S$ admet un supplémentaire fermé $F_0 \subset F$. On considère $G = \{(S(x)+z, x) \mid x \in E,\ z \in F_0\} \subset F \times E$.
   (i) Montrer que G est le graphe d'une application $T : F \to E$.
   On admet que, comme G est un sous-espace, T est linéaire.
   (ii) Montrer que T est continue.
   (iii) Montrer que $T \circ S = \mathrm{Id}$.
   On pouvait aussi utiliser l'exercice 5.

c. On considère le cas $E = F = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, et on suppose que $S \in L'(E)$ est une *isométrie*, c'est-à-dire qu'on a $\|S(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$. Montrer qu'il existe $T \in L'(E)$ tel que $T \circ S = \mathrm{Id}$.

Exercice 7. Soit E, F des espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire. On suppose que pour toute forme linéaire continue $\varphi \in F'$, la forme linéaire $\varphi \circ T \in E^*$ est également continue.

a. On note $G(T) \subset E \times F$ le graphe de T. Montrer que
$$G(T) = \{(x,y) \in E \times F \mid \forall \varphi \in F' \quad \varphi \circ T(x) = \varphi(y)\}.$$

b. Montrer que T est continu.

Application. On suppose que l'espace vectoriel E est muni de deux normes p et $q : E \to \mathbb{R}$. On note E'_p, E'_q les duaux topologiques associés, qui sont des sous-espaces du dual algébrique E^*.

c. On suppose que $E'_q \subset E'_p$. Montrer que l'injection canonique $\iota : E'_q \to E'_p$ est continue.

d. Montrer que $E'_q \subset E'_p$ si et seulement s'il existe une constante $M > 0$ telle que $q \leq Mp$.

Exercice 8. On cherche à estimer la norme dans $L^1([0,2\pi])$ du noyau de Dirichlet
$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)}.$$

Pour cela on découpe l'intégrale aux points où D_n change de signe :
$$\|D_n\|_1 = 2\int_0^\pi |D_n(t)|\mathrm{d}t = 2\sum_{k=0}^{n-1} I_{n,k} + 2\int_{\frac{2n\pi}{2n+1}}^{\pi} |D_n(t)|\mathrm{d}t, \quad \text{avec} \quad I_{n,k} = \int_{\frac{2k\pi}{2n+1}}^{\frac{2(k+1)\pi}{2n+1}} |D_n(t)|\mathrm{d}t.$$

a. En utilisant l'inégalité $\sin x \leq x$ valable sur $\mathbb{R}_+$, montrer que $I_{n,k} \geq 4/((k+1)\pi)$.

b. En déduire que $\|D_n\|_1$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 9. Pour $f \in L^1([0,2\pi])$ on note $c_k(f) = \int_0^{2\pi} e^{-ikt} f(t)\mathrm{d}t$ le k^{e} coefficient de Fourier de f et on considère la transformée de Fourier $T : L^1([0,2\pi]) \to \ell^\infty(\mathbb{Z})$, $f \mapsto (c_n(f))_n$. On rappelle que T est injective et que son image est contenue dans $c_0(\mathbb{Z})$ (*lemme de Riemann-Lebesgue*). On va montrer qu'il existe des suites $(c_n)_n \in c_0(\mathbb{Z})$ qui ne sont les suites de coefficients de Fourrier d'aucune fonction $f \in L^1(\mathbb{Z})$.

a. Montrer que T est un opérateur borné relativement à la norme de $L^1([0,2\pi])$ et à la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $c_0(\mathbb{Z})$.

b. Étudier le comportement de $\|T(D_n)\|_\infty / \|D_n\|_1$ lorsque $n \to \infty$, où D_n est le noyau de Dirichlet étudié à l'exercice 8.

c. À l'aide du théorème des isomorphismes de Banach, montrer que $\operatorname{Im} T \neq c_0(\mathbb{Z})$.

Exercice 10. Soit E l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues et 2π-périodiques, muni de la norme de la convergence uniforme. On note $c_k(f) = \int_0^{2\pi} e^{-ikt} f(t)\mathrm{d}t$ le k^{e} coefficient de Fourier de $f \in E$ et $S_n(f) : t \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikt} \in E$ les sommes partielles symétriques de la série de Fourier associée à f. On fixe $t \in [0, 2\pi]$ et on considère la forme linéaire $L_n : f \mapsto S_n(f)(t)$.

a. Montrer que $L_n(f) = \int_0^{2\pi} f(s)D_n(t-s)\mathrm{d}s$, où D_n est le noyau de Dirichlet introduit à l'exercice 8.

b. Montrer que $\|L_n\| = \|D_n\|_1$. *On pourra utiliser la densité de* $C([0,1])$ *dans* $L^1([0,1])$.

c. À l'aide du théorème de Banach-Steinhaus, montrer qu'il existe une fonction $f \in E$ telle que la série de Fourier de f ne converge pas au point t.

Exercice 11. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = C([0,1], \mathbb{R})$ et on note $\|\cdot\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur E. Pour $t \in [0,1]$ on note φ_t l'application linéaire $\varphi_t : E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(t)$.
On se donne de plus une autre norme $N : E \to \mathbb{R}$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :
— (E, N) est complet ;
— si f_n converge vers f relativement à N alors f_n converge simplement vers f.

a. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$ l'application φ_t est continue relativement à N.

b. On fixe $f \in E$. Montrer que la famille de nombres réels $\varphi_t(f)$, avec $t \in [0,1]$, est bornée.

c. Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ telle que $\|f\|_\infty \leq KN(f)$ pour toute $f \in E$.
On pourra utiliser le théorème de Banach-Steinhaus.

d. Montrer que N est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.
On pourra appliquer un théorème du cours à l'application $\mathrm{Id} : E \to E$.

Exercice 12. Soit E un EVN et $X \subset E$ une partie de E telle que, pour toute forme linéaire continue $\varphi \in E'$, l'ensemble $\varphi(X) \subset \mathbb{R}$ est borné.

a. À l'aide du principe de la borne uniforme, montrer l'existence d'une constante $M > 0$ telle que $|\varphi(x)| \leq M\|\varphi\|$ pour tout $x \in X$ et toute $\varphi \in E'$.

b. En déduire que X est borné (en norme) dans E.

c. Soit $K \subset E$ une partie compacte pour la topologie faible. Montrer que K est bornée.

d. Le résultat précédent reste-t-il valable pour un compact préfaible dans le dual d'un EVN ?

Exercice 13. *(Partiel 2016)* On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. Pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on définit

$$\varphi_n(f) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\tfrac{k}{n}).$$

a. Montrer que φ_n est une forme linéaire continue sur E telle que $\|\varphi_n\| \leq 2$.

b. En utilisant des fonctions affines par morceaux, montrer que $\|\varphi_1\| = 2$.
On admet qu'on a plus généralement $\|\varphi_n\| = 2$ *pour tout* n.

c. On fixe $f \in E$. Que vaut $\lim_{n\infty} \varphi_n(f)$?

d. On suppose que f est K-lipschitzienne : pour tous $x, y \in [0,1]$ on a $|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|$.

(i) Montrer l'inégalité suivante :

$$\Big| \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\mathrm{d}t - \tfrac{1}{n} f(\tfrac{k}{n}) \Big| \leq \frac{K}{2n^2}$$

(ii) En déduire que $\varphi_n(f) = O(\frac{1}{n})$.

e. Montrer qu'il existe une fonction $f \in E$ pour laquelle on n'a pas $\varphi_n(f) = O(\frac{1}{n})$.
On pourra utiliser le théorème de Banach-Steinhaus.