Opérateurs sur un espace de Hilbert

Exercice 1. Soit H un espace de Hilbert et $T \in L'(H)$ un opérateur tel que $\|T\| \leq 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $T_n = (\mathrm{Id} + T + T^2 + \cdots + T^n)/n$.
On note par ailleurs P la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id})$.

a. Montrer que $T(x) = x \Leftrightarrow (x|Tx) = \|x\|^2$.
En déduire que $\mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(T^* - \mathrm{Id})$.

b. Montrer que $\mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id})$ et $\overline{\mathrm{Im}}(T - \mathrm{Id})$ sont des supplémentaires orthogonaux dans H.

c. Montrer que pour tout $x \in H$ on a $\lim_{n\infty} T_n(x) = P(x)$.

Exercice 2. Soit (Ω, μ) un espace mesuré et $H = L^2(\Omega, \mu)$ muni de sa structure hilbertienne usuelle. On fixe $K \in L^2(\Omega \times \Omega, \mu \times \mu)$ et pour toute $f \in H$ on définit $T(f) \in H$ en posant

$$T(f)(s) = \int_\Omega K(s,t) f(t) \mathrm{d}\mu(t).$$

a. Montrer que T est un opérateur borné sur H et que $\|T\| \leq \|K\|_2$.

b. Déterminer l'adjoint T^* de T.

Pout $t \in \Omega$ fixé on note $K_t : \Omega \to \mathbb{C}$, $s \mapsto K(t,s)$. On fixe une base hilbertienne $(e_n)_n$ de H.

c. Montrer que $\|K\|_2^2 = \int_\Omega \|K_t\|_2^2 \mathrm{d}\mu(t) = \int_\Omega \sum_n |(\bar{e}_n|K_t)|^2 \mathrm{d}\mu(t)$.

d. Montrer que $\sum_n \|Te_n\|^2 = \|K\|_2^2 < +\infty$. On dit que T est un opérateur de Hilbert-Schmidt.
On pourra vérifier que $T(f)(s) = (\bar{f}|K_s)$.

e. Peut-on trouver un noyau $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$ tel que l'opérateur T associé soit inversible ?

Exercice 3. On considère $H = L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ muni du produit scalaire hermitien $(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t) \mathrm{d}t$. On note K le sous-espace fermé engendré par les fonction $e_n : t \mapsto e^{int}$, $n \geq 0$ et P la projection orthogonale sur K.
Par ailleurs on note C l'espace des fonctions $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ continues et telles que $f(-\pi) = f(\pi)$. Pour $f \in C$ et $g \in K$ on note $T_f(g) = P(fg)$.

a. Montrer que T_f est un opérateur borné sur K.

b. Pour i, $j \in \mathbb{N}$ exprimer $(e_i|T_f e_j)$ à l'aide des coefficients de Fourier de f.
En déduire que $T_f = T_g \Rightarrow f = g$.

c. Montrer que $T_f^* = T_{\bar{f}}$.

Exercice 4. On considère l'espace H des fonctions ξ réelles absolument continues sur $[0,1]$ (donc dérivables presque partout), nulles en 0 et telles que $\xi' \in L^2([0,1], \mathbb{R})$, muni de la norme $\|\xi\| = \|\xi'\|_2$. Autrement dit, H est l'espace des fonctions $\xi : x \mapsto \int_0^x f$ avec $f \in L^2([0,1], \mathbb{R})\}$, et on a alors $f = \xi'$ presque partout.

a. Montrer que H est un espace de Hilbert. Quel est le produit scalaire hermitien $(\cdot|\cdot)$ correspondant ?

b. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$ la forme linéaire $\varphi_t : \xi \mapsto \xi(t)$ est continue sur H.

c. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$ il existe $\eta_t \in H$ telle que $(\eta_t|\xi) = \varphi_t(\xi)$ pour toute $\xi \in H$.

d. Montrer que $\eta_t(s) = \min(s,t)$ pour tous s, $t \in [0,1]$.

e. Montrer que pour toute $f \in L^2([0,1], \mathbb{R})$ il existe un vecteur $\eta_f \in H$ tel que $\forall \xi \in H$ $(\xi|\eta_f) = \int_0^1 (\xi|\eta_t) f(t) \mathrm{d}t$.

f. Montrer que l'opérateur à noyau T sur $L^2([0,1], \mathbb{R})$ associé au noyau $K(s,t) = \min(s,t)$ est positif.

Définition. On appelle *spectre* d'un opérateur $T \in L'(H)$ le sous-ensemble $\mathrm{Sp}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda \mathrm{Id} \text{ n'est pas inversible}\}$. En dimension finie, $T - \lambda\mathrm{Id}$ est inversible **ssi** il est injectif, donc $\mathrm{Sp}(T)$ est l'ensemble des valeurs propres de T. En dimension infinie, il peux y avoir des éléments de $\mathrm{Sp}(T)$ qui ne sont pas des valeurs propres de T.

Exercice 5. Soit X un espace topologique compact muni d'une mesure borélienne μ, et $H = L^2(\Omega, \mu)$ muni de sa structure hilbertienne usuelle. On fixe $f \in C(X, \mathbb{C})$ et on considère l'opérateur $M : H \to H$, $\xi \mapsto f\xi$.

a. Vérifier que M est borné et déterminer M^*.

b. On suppose que f ne s'annule pas. Montrer que M est inversible et déterminer M^{-1}.

c. On suppose que f s'annule en $t_0 \in X$.

  (i) On fixe $\epsilon > 0$. Trouver une fonction $\xi \in H$ telle que $\|\xi\|_2 = 1$ et $\|M\xi\|_2 \leq \epsilon$.

  (ii) Montrer par l'absurde que M n'est pas inversible.

d. Montrer que le spectre de T est égal à $f(X)$.

Exercice 6. On considère $H = \ell^2(\mathbb{N})$ muni de sa base canonique $(e_n)_n$ et l'opérateur $S : H \to H$ donné par $S(e_k) = e_{k+1}$.

a. Déterminer S^* et $\|S\|$.

b. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ l'application $S - \lambda\mathrm{Id}$ est injective.
Autrement dit S n'admet pas de valeur propre.

c. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > 1$. Monter que $S - \lambda\mathrm{Id}$ est inversible.

d. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| \leq 1$. Déterminer $(\mathrm{Im}\, S)^\perp$.

e. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$. On considère $x_n = (n+1)^{-1/2} \sum_{k=0}^{n} \lambda^{-k} e_k$.

  (i) Montrer que $\lim_{n\infty}(S(x_n) - \lambda x_n) = 0$.

  (ii) Montrer que $S - \lambda\mathrm{Id}$ n'est pas bijective.

f. Déterminer le spectre de S.