

ADM214T — MATHÉMATIQUES  
EXAMEN TERMINAL

*Durée : 2h. Tous les documents et calculatrices (autonomes, non communicantes) sont autorisées. Le sujet comporte cinq exercices indépendants, qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité. Chaque étudiant.e doit porter son nom dans le coin supérieur droit de la copie et le cacher par collage.*

**Exercice 1.** On considère l'équation  $x^2 - 19x + 3m = 0$ , d'inconnue  $x$  et de paramètre  $m$ .

- On suppose, dans cette question seulement, que  $m = 28$ .  
Résoudre l'équation dans ce cas.
- Pour quelles valeurs de  $m$  l'équation n'admet-elle aucune solution ?

**Exercice 2.** On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Calculer le produit matriciel  $AB$ . *On présentera le détail du calcul.*
- Sans nouveau calcul*, dire quel est l'inverse de la matrice  $A$ .
- Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ -x + y - z = 2 \\ -x + z = 1. \end{cases}$$

**Exercice 3.** On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -7 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

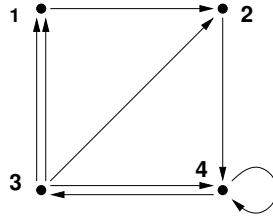
- Calculer la matrice complémentaire  $\tilde{A}$  de  $A$ .
- Calculer le déterminant de  $A$ . La matrice  $A$  est-elle inversible ?
- Calculer le polynôme caractéristique  $P_A$  de  $A$ .  
Vérifier que  $-1$  est une racine de  $P_A$ .
- Déterminer les valeurs propres de la matrice  $A$ .

**Exercice 4.** On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ .

On admet que les valeurs propres de  $A$  sont  $r_1 = 1$  et  $r_2 = 2$ .

- Déterminer les nombres  $\alpha, \beta$  tels que chacune des valeurs propres  $r = r_1, r_2$  de  $A$  vérifie  $r^5 = \alpha r + \beta$ .
- On rappelle qu'on a alors  $A^5 = \alpha A + \beta I$ . Calculer la matrice  $A^5$ .

**Exercice 5.** On considère le graphe  $\mathbb{G}$  suivant :



- Écrire la matrice d'adjacence  $A$  du graphe  $\mathbb{G}$ .

On donne ci-dessous les matrices  $A^2, A^3$  :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

- La matrice  $A$  est-elle irréductible ?  
Que peut-on en déduire pour le graphe  $\mathbb{G}$  ?
- Dans le graphe  $\mathbb{G}$ , combien y a-t-il de chemins de longueur 3 allant du sommet 4 vers le sommet 2 ?  
Expliquer comment trouver cette information matriciellement.