Université de Caen
UFR Sciences
M1 MFA

2^{e} semestre 2017-2018
Mathématiques
Analyse Fonctionnelle

Analyse Fonctionnelle
Contrôle terminal
16 avril 2016

Durée : 3 heures. Aucun document ni calculatrice n'est autorisé.
Les 4 exercices sont indépendants.

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. On note E^* l'espace des formes linéaires *continues* sur E, muni de la norme d'opérateur. Soit φ, $\psi \in E^*$.

On rappelle le résultat d'algèbre suivant : si φ est nulle sur $\operatorname{Ker}\psi$, alors φ est proportionnelle à ψ. Autrement dit, si $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in \operatorname{Ker}\psi$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi = \alpha\psi$.

On fait maintenant l'hypothèse moins forte suivante : on suppose qu'il existe $\varepsilon \geq 0$ tel que $|\varphi(x)| \leq \varepsilon\|x\|$ pour tout $x \in \operatorname{Ker}\psi$.

1. Montrer qu'il existe $\varphi' \in E^*$ telle que $\|\varphi'\| \leq \varepsilon$ et $\varphi'(x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in \operatorname{Ker}\psi$.
2. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi = \varphi' + \alpha\psi$.
   En déduire que $\|\varphi - \alpha\psi\| \leq \varepsilon$.
3. On suppose de plus que $\|\varphi\| = \|\psi\| = 1$. Montrer que $|1 - |\alpha|| \leq \varepsilon$.
   Dans le cas $\alpha \geq 0$, en déduire que $\|\varphi - \psi\| \leq 2\varepsilon$.

Exercice 2. Soit E, F des espaces de Banach et $S \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire continue.

1. On suppose qu'il existe $T \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $T \circ S = \mathrm{Id}$.
   (a) Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $\|S(x)\| \geq M\|x\|$.
   (b) Montrer que S est injective et que $\operatorname{Im} S$ est fermée.
   (c) Montrer que $\operatorname{Ker} T$ est un supplémentaire fermé de $\operatorname{Im} S$.
2. On suppose maintenant que S est injective, que $\operatorname{Im} S$ est fermée, et que $\operatorname{Im} S$ admet un supplémentaire fermé $F_0 \subset F$. On considère $G = \{(S(x) + z, x) \mid x \in E,\ z \in F_0\} \subset F \times E$, et l'espace $F \times E$ est muni de la norme $\|(y, x)\| = \|y\|_F + \|x\|_E$.
   (a) Montrer que G est le graphe d'une application $T : F \to E$.
   On admet que, comme G est un sous-espace, T est linéaire.
   (b) Montrer que : $(y, x) \in G \Leftrightarrow y - S(x) \in F_0$.
   (c) Montrer que T est continue.
   (d) Montrer que $T \circ S = \mathrm{Id}$.

suite au verso

Exercice 3. Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur tel que $\|T\| \leq 1$.

1. Montrer que pour tout $x \in H$ on a $\|T(x) - x\|^2 \leq 2\|x\|^2 - 2\operatorname{Re}(x|T(x))$.
2. Montrer que $T(x) = x \Leftrightarrow (x|Tx) = \|x\|^2$.
3. Montrer que $\operatorname{Ker}(T - \mathrm{Id}) = \operatorname{Ker}(T^* - \mathrm{Id})$.
4. Montrer que $\operatorname{Ker}(T - \mathrm{Id})$ et $\overline{\operatorname{Im}(T - \mathrm{Id})}$ sont des supplémentaires orthogonaux dans H.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $T^n = T \circ \cdots \circ T$ (n fois) et $T_n = \frac{1}{n}(\mathrm{Id} + T + T^2 + \cdots + T^n)$.
On note par ailleurs P la projection orthogonale sur $\operatorname{Ker}(T - \mathrm{Id})$.

5. Soit $y \in \operatorname{Im}(T - \mathrm{Id})$. Montrer que $\lim_{n\infty} T_n(y) = 0$.
6. Soit $y \in \overline{\operatorname{Im}(T - \mathrm{Id})}$. Montrer que $\lim_{n\infty} T_n(y) = 0$.
7. Montrer que pour tout $x \in H$ on a $\lim_{n\infty} T_n(x) = P(x)$.

Exercice 4.
On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme.

Pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on définit $\varphi_n(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\tfrac{k}{n})$.

1. Montrer que φ_n est une forme linéaire continue sur E telle que $\|\varphi_n\| \leq 2$.
2. En utilisant des fonctions affines par morceaux, montrer que $\|\varphi_1\| = 2$.
   On admet qu'on a plus généralement $\|\varphi_n\| = 2$ pour tout n.
3. On fixe $f \in E$. Énoncer le résultat d'intégration qui permet de montrer que $\lim_{n\infty} \varphi_n(f) = 0$.
4. On souhaite montrer qu'il existe des fonctions $f \in E$ telle que $\varphi_n(f)$ tend vers 0 « arbitrairement lentement ». On fixe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\varepsilon_n > 0$ pour tout n et $\lim_{n\infty} \varepsilon_n = 0$. On suppose, par l'absurde, que pour toute fonction $f \in E$ on a $\varphi_n(f) = O(\varepsilon_n)$.

   En appliquant le théorème de Banach-Steinhaus à une suite de formes linéaires bien choisies, montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|\varphi_n\| \leq C\varepsilon_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Conclure.
5. On suppose que f est K-lipschitzienne : pour tous $x, y \in [0,1]$ on a $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$.
   Montrer que $\varphi_n(f) = O(\frac{1}{n})$.

Rappel : étant données deux suites réelles $(u_n)_n$, $(v_n)_n$, on dit que $u_n = O(v_n)$ s'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ et une constante $D > 0$ telle que $|u_n| \leq D|v_n|$ pour tout $n \geq N$.