Université de Caen
UFR Sciences
M1 MFA

2e semestre 2017-2018
Mathématiques
Analyse Fonctionnels

Corrigé du Partiel

Exercice 1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.*

1. *Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction qu'on calculera.*
   C'est un calcul très classique. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé et $n > -x$ on a $f_n(x) = \exp(n \ln(1 + \frac{x}{n}))$. On utilise alors le $DL_1(0)$ de $\ln(1+t)$ et la continuité de l'exponentielle :
   $$f_n(x) = \exp(n(\tfrac{x}{n} + o(\tfrac{1}{n}))) = \exp(x + o(1)) \to e^x.$$
   La suite de fonction $(f_n)_n$ converge donc simplement vers la fonction exponentielle.
2. *On pose $g_n(x) = \ln(f_{n+1}(x)) - \ln(f_n(x))$ pour $x \in \left]-n, +\infty\right[$. Étudier les variations et le signe de g_n.*
   Pour n fixé, $g_n : x \mapsto (n+1)\ln(1 + \frac{x}{n+1}) - n \ln(1 + \frac{x}{n})$ est de classe C^1 sur $\left]-n, +\infty\right[$ et on a
   $$g_n'(x) = \frac{1}{1 + \frac{x}{n+1}} - \frac{1}{1 + \frac{x}{n}}.$$
   Comme la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, la suite $(1/(1 + \frac{x}{n}))_n$ est croissante si $x \geq 0$, décroissante si $x \leq 0$. On a donc $g_n' \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$ et $g_n' \leq 0$ sur $\mathbb{R}_-$. En particulier g_n admet un minimum global en 0 : pour tout $x \in \left]-n, +\infty\right[$ on a $g_n(x) \geq g_n(0) = 0$.
3. *Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.*
   Tout compact de $\mathbb{R}$ est inclus dans un segment $[-C, C]$, fixons donc un tel segment et étudions la suite de fonctions $(f_n)_n$ pour $n > C$. D'après la question précédente, sur cet intervalle on a $f_{n+1}/f_n = e^{g_n} \geq e^0 = 1$, car la fonction exponentielle est croissante. Comme les fonctions f_n sont positives sur $[-C, C]$, on en déduit que la suite $(f_n(x))_n$ est croissante pour tout $x \in [-C, C]$. De plus chaque fonction f_n est continue, car polynomiale, et la limite simple est continue car c'est la fonction exponentielle. Enfin $[-C, C]$ est compact, et le théorème de Dini permet de conclure que la convergence est uniforme sur $[-C, C]$.

Exercice 2. *On considère l'espace $H = L^2([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$. On note $\mathcal{L}(H)$ l'espace des applications linéaires continues de H dans H, muni de la norme d'opérateur.*
*Pour toute fonction $K \in C([0,1]^2, \mathbb{R})$, on considère l'*opérateur à noyau *associé $T : H \to H$, donné par la formule suivante :*
$$T(f)(s) = \int_0^1 K(s,t) f(t) \mathrm{d}t.$$
On admet la convergence de l'intégrale ci-dessus, ainsi que la linéarité de l'application T.
On note Pol $\subset C([0,1]^2, \mathbb{R})$ *le sous-espace des fonctions polynomiales.*

1. *Montrer que pour $f \in H$ on a bien $T(f) \in H$, puis que $T : H \to H$ est continue avec $\|T\| \leq \|K\|_\infty$.*
   En appliquant l'inégalité triangulaire puis l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour les intégrales on obtient la majoration suivante
   $$|T(f)(s)|^2 \leq \left(\int_0^1 |K(s,t)||f(t)|\mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_0^1 |K(s,t)|^2 \mathrm{d}t \int_0^1 |f(t)|^2 \mathrm{d}t \leq \|K\|_\infty^2 \|f\|_2^2.$$
   (Au passage cette inégalité montre que la fonction $(t \mapsto K(s,t)f(t))$ est intégrable sur $[0,1]$, pour tout $s \in [0,1]$.) En particulier la fonction $T(f)^2$ est bornée donc intégrable sur $[0,1]$, ce qui montre que $T(f) \in H$. De plus en intégrant par rapport à s sur $[0,1]$ on obtient $\|T(f)\|_2 \leq \|K\|_\infty \|f\|_2$. Cela montre que l'application linéaire T est continue et que $\|T\| \leq \|K\|_\infty$.
2. *On considère le cas où le noyau K est polynomial : $K(s,t) = \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N a_{k,l} s^k t^l$.*
   (a) *Montrer que $T(f)$ est alors un polynôme, dont on calculera les coefficients en fonctions des coefficients $a_{k,l}$ et des* moments *de f donnés par la formule $m_l(f) = \int_0^1 t^l f(t) \mathrm{d}t$.*
   En intervertissant les sommes finies avec l'intégrale on calcule
   $$T(f)(s) = \textstyle\sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N a_{k,l} s^k \int_0^1 t^l f(t) \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N a_{k,l} s^k m_l(f)$$
   Ainsi $T(f)$ est bien un polynôme, $T(f)(s) = \sum_{k=0}^N b_k s^k$ avec $b_k = \sum_{l=0}^N a_{k,l} m_l(f)$.
   (b) *Montrer que dans ce cas T est une application linéaire de rang fini, i.e.* $\dim \operatorname{Im} T < +\infty$.
   D'après la question précédente l'image de T est incluse dans le sous-espace des fonctions polynomiales de degré au plus N, qui est de dimension $N+1$.

3. *Montrer que toute fonction continue $K \in C([0,1]^2, \mathbb{R})$ est limite uniforme de polynômes $P \in \mathrm{Pol}$. On appliquera le théorème de Stone-Weierstraß après avoir soigneusement vérifié ses hypothèses.*
Tout d'abord, $X = [0,1]^2$ est compact car fermé et borné dans $\mathbb{R}^2$ qui est un EVN de dimension finie. Ensuite, Pol est une sous algèbre unifère de $C(X,\mathbb{R})$: en effet le produit de deux fonctions polynomiales est polynomiale, et l'unité de $C(X,\mathbb{R})$ correspond au polynôme constant égal à 1. Enfin, Pol sépare les points de X. Pour cela il suffit de considérer les fonctions $f : (s,t) \mapsto s$ et $g : (s,t) \mapsto t$ qui sont dans Pol. Si $x = (s,t)$, $x' = (s',t')$ sont deux points distincts de X, on a soit $s \neq s'$, donc $f(x) \neq f(x')$, soit $s = s'$ et $t \neq t'$, et alors $g(x) \neq g(x')$. Le théorème de Stone-Weierstraß assure alors que Pol est dense dans $C(X,\mathbb{R})$, c'est-à-dire que toute fonction $K \in C([0,1]^2, \mathbb{R})$ est limite uniforme d'éléments de Pol.
4. *Montrer que tout opérateur à noyau T associé à un noyau K continu sur $[0,1]^2$ est limite dans $\mathcal{L}(H)$ d'applications linéaires de rang fini.*
D'après la question précédente, il existe une suite de fonction polynomiales $P_n \in \mathrm{Pol}$ qui converge uniformément vers le noyau K. Notons S_n l'opérateur à noyau associé à P_n, d'après la question 2 c'est une application linéaire de rang fini. De plus, par linéarité de l'intégrale, l'application linéaire $T - S_n$ est l'opérateur à noyau associé à $K - P_n$. D'après la question 1 on a donc $\|T - S_n\| \leq \|K - P_n\|_\infty$. La propriété de convergence uniforme signifie que $\lim_{n\infty} \|K - P_n\|_\infty = 0$, par le lemme des gendarmes on a donc $\lim_{n\infty} \|T - S_n\| = 0$, et donc $(S_n)_n$ converge vers T dans $\mathcal{L}(H)$.

Exercice 3. *On considère l'espace $E = \{f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C} \mid f$ continue et $f(-\pi) = f(\pi)\}$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On note $B \subset E$ le sous-ensemble formé des fonctions $f : t \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$ avec $\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+k^2)|c_k|^2 \leq 1$.*

1. *Soit $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ telle que $\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+k^2)|c_k|^2 \leq 1$. Montrer que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2}\right)^{1/2}$.*
On applique l'inégalité de Cauchy-Schwartz comme suit :
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(\sqrt{1+k^2}|c_k|) \times \tfrac{1}{\sqrt{1+k^2}} \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+k^2)|c_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \tfrac{1}{1+k^2}\right)^{1/2}$$
Par hypothèse sur la suite $(c_k)_k$ on obtient bien l'inégalité demandée.
2. *On fixe $t \in [-\pi,\pi]$. Montrer que $\lim\limits_{s\to t} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2}|e^{iks} - e^{ikt}|^2 = 0$.*
Posons $g_k(s) = \frac{1}{1+k^2}|e^{iks} - e^{ikt}|^2$. Pour tout $s \in [-\pi,\pi]$ on a
$$0 \leq g_k(s) \leq \tfrac{1}{1+k^2}(|e^{iks}| + |e^{ikt}|)^2 = \tfrac{4}{1+k^2}$$
et $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{4}{1+k^2} < +\infty$ par comparaison à la série de Riemann $(\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k^2})$. La série de fonctions $(\sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k)$ converge donc normalement et comme chaque fonction g_k est continue c'est aussi le cas de la somme. En particulier on a $\lim_{s\to t} \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k(s) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k(t) = 0$, ce qui est la limite demandée.
On peut aussi invoquer le théorème de convergence dominée, ce qui revient au même.
3. *On fixe $f \in B$. Montrer qu'on a $|f(s) - f(t)| \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2}|e^{iks} - e^{ikt}|^2\right)^{1/2}$ pour tous s, $t \in [-\pi,\pi]$.*
Par hypothèse on peut écrire $f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$ avec $\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+k^2)|c_k|^2 \leq 1$. On applique alors l'inégalité triangulaire, puis l'inégalité de Cauchy-Schwartz comme à la question 1 :
$$\begin{aligned}|f(s) - f(t)| &= |\textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(e^{iks} - e^{ikt})| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k||e^{iks} - e^{ikt}| \\ &\leq \left(\textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+k^2)|c_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \tfrac{1}{1+k^2}|e^{iks} - e^{ikt}|^2\right)^{1/2},\end{aligned}$$
ce qui donne l'inégalité voulue car $\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+k^2)|c_k|^2 \leq 1$.
4. *On fixe $t \in [-\pi,\pi]$ et $\epsilon > 0$. À l'aide des questions 2 et 3, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $|f(s) - f(t)| \leq \epsilon$ pour tout s tel que $|s - t| \leq \alpha$ et pour toute $f \in B$.*
D'après la question 2 et la définition des limites il existe $\alpha > 0$ tel que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2}|e^{iks} - e^{ikt}|^2 \leq \epsilon^2$ pour tout s tel que $|s - t| \leq \alpha$. Pour toute $f \in B$ et tout s tel que $|s - t| \leq \alpha$ la question 3 montre alors que $|f(s) - f(t)| \leq \epsilon$.
5. *Montrer que l'adhérence de B dans E est compacte.*
On applique le théorème d'Ascoli à la famille de fonctions $B \subset C([-\pi,\pi], \mathbb{C})$. Notons tout d'abord que $[-\pi,\pi]$ est bien compact. La question 4 montre que la famille B est équicontinue en t, pour tout $t \in [-\pi,\pi]$. De plus, pour $t \in [-\pi,\pi]$ fixé et $f \in B$ on a $|f(t)| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2}\right)^{1/2}$ d'après la question 1, par conséquent $B_t = \{f(t) \mid f \in B\}$ est borné et donc d'adhérence compacte dans $\mathbb{C}$. Le théorème s'applique et donne la conclusion voulue.
6. *Soit $(f_n)_n \in E$ une suite de fonctions. On suppose que chaque f_n est de classe C^1 et vérifie $\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(t)|^2 \mathrm{d}t \leq \pi$ et $\int_{-\pi}^{\pi} |f_n'(t)|^2 \mathrm{d}t \leq \pi$. Montrer que $(f_n)_n$ admet une sous-suite qui converge uniformément.*
Comme f_n est de classe C^1 le théorème de Dirichlet s'applique et on a donc $f_n(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f_n) e^{ikt}$, avec $c_k(f_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(t) e^{-ikt} \mathrm{d}t$. Par ailleurs une intégration par parties donne $c_k(f_n') = ik c_k(f_n)$. On applique alors l'identité de Parseval à f_n et f_n', puis l'hypothèse : $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f_n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(t)|^2 \mathrm{d}t \leq \frac{1}{2}$ et $\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 |c_k(f_n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_n'(t)|^2 \mathrm{d}t \leq \frac{1}{2}$. En additionnant on obtient $\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+k^2)|c_k(f_n)|^2 \leq 1$, autrement dit $f_n \in B$. Par compacité de $\bar{B}$, $(f_n)_n$ admet une sous-suite qui converge uniformément.