Université de Caen
UFR Sciences
M1 MFA

2e semestre 2017-2018
Mathématiques
Analyse Fonctionnels

Analyse Fonctionnelle
Partiel du 9 mars 2018

Durée : 2 heures. Aucun document ni calculatrice n'est autorisé. Les 3 exercices sont indépendants.
La notation tiendra compte de la qualité et de la précision de la rédaction.

Exercice 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction qu'on calculera.
2. On pose $g_n(x) = \ln(f_{n+1}(x)) - \ln(f_n(x))$ pour $x \in]-n, \infty[$. Étudier les variations, puis le signe de g_n.
3. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Exercice 2. On considère l'espace $H = L^2([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$. On note $\mathcal{L}(H)$ l'espace des applications linéaires continues de H dans H, muni de la norme d'opérateur.
Pour toute fonction $K \in C([0,1]^2, \mathbb{R})$, on considère l'*opérateur à noyau* associé $T : H \to H$, donné par la formule suivante :

$$T(f)(s) = \int_0^1 K(s,t) f(t) \mathrm{d}t.$$

On admet la convergence de l'intégrale ci-dessus, ainsi que la linéarité de l'application T.
On note $\mathrm{Pol} \subset C([0,1]^2, \mathbb{R})$ le sous-espace des fonctions polynomiales.

1. Montrer que pour $f \in H$ on a bien $T(f) \in H$, puis que $T : H \to H$ est continue avec $\|T\| \leq \|K\|_\infty$.
2. On considère le cas où le noyau K est polynomial : $K(s,t) = \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N a_{k,l} s^k t^l$.
   (a) Montrer que $T(f)$ est alors un polynôme, dont on calculera les coefficients en fonctions des coefficients $a_{k,l}$ et des *moments* de f donnés par la formule $m_l(f) = \int_0^1 t^l f(t) \mathrm{d}t$.
   (b) Montrer que dans ce cas T est une application linéaire de rang fini, i.e. $\dim \mathrm{Im}\, T < +\infty$.
3. Montrer que toute fonction continue $K \in C([0,1]^2, \mathbb{R})$ est limite uniforme de polynômes $P \in \mathrm{Pol}$.
   On appliquera le théorème de Stone-Weierstraß après avoir soigneusement vérifié ses hypothèses.
4. Montrer que tout opérateur à noyau T associé à un noyau K continu sur $[0,1]^2$ est limite dans $\mathcal{L}(H)$ d'applications linéaires de rang fini.

Exercice 3. On considère l'espace $E = \{f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C} \mid f \text{ continue et } f(-\pi) = f(\pi)\}$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On note $B \subset E$ le sous-ensemble formé des fonctions $f : t \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$ avec $\sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+k^2)|c_k|^2 \leq 1$.

1. Soit $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ telle que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+k^2)|c_k|^2 \leq 1$. Montrer que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2}\right)^{1/2}$.
   On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour les séries.

Le résultat de la question 1 montre en particulier que pour $f \in B$ la série de fonction $f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$ converge normalement, donc f est bien continue.

2. On fixe $t \in [-\pi, \pi]$. Montrer que $\lim\limits_{s\to t} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2} |e^{iks} - e^{ikt}|^2 = 0$.
3. On fixe $f \in B$. Montrer qu'on a $|f(s) - f(t)| \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2} |e^{iks} - e^{ikt}|^2\right)^{1/2}$ pour tous $s, t \in [-\pi, \pi]$.
4. On fixe $t \in [-\pi, \pi]$ et $\epsilon > 0$. À l'aide des questions 2 et 3, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $|f(s) - f(t)| \leq \epsilon$ pour tout s tel que $|s - t| \leq \alpha$ et pour toute $f \in B$.
5. Montrer que l'adhérence de B dans E est compacte.
6. Soit $(f_n)_n \in E$ une suite de fonctions.
   On suppose que chaque f_n est de classe C^1 et vérifie $\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(t)|^2 \mathrm{d}t \leq \pi$ et $\int_{-\pi}^{\pi} |f_n'(t)|^2 \mathrm{d}t \leq \pi$.
   Montrer que $(f_n)_n$ admet une sous-suite qui converge uniformément.

La question 6 utilise des résultats de la théorie des séries de Fourier. On rappelle notamment l'identité de Parseval : $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t$, pour $f : t \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$.