

ESPACES VECTORIELS NORMÉS ET TOPOLOGIE

Exercice 1.

- Soit E un espace topologique. Pour $B \subset E$ on note $\alpha(B)$ l'adhérence de l'intérieur B . Montrer que si B est ouvert on a $B \subset \alpha(B)$, et donner un exemple où l'inclusion est stricte. Montrer que si B est fermé on a $\alpha(B) \subset B$, et donner un exemple où l'inclusion est stricte.
- Dans cette question E est un espace vectoriel normé. On fixe $a \in E$, $r > 0$ et on note $B_o = B(a, r)$ (resp. $B_f(a, r)$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre a et rayon r . Montrer que $\overline{B_o} = B_f$ et ${}^\circ B_f = B_o$. En particulier $\alpha(B_f) = B_f$.
- On se place dans $E =]-\infty, 0] \cup [1, 2] \cup]3, +\infty[$, muni de la distance induite par la distance usuelle de \mathbb{R} . On note $B_o = B(1, 1)$ (resp. $B_f = \overline{B}(1, 1)$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre 1 et rayon 1. Expliciter les sous-ensembles suivants de \mathbb{R} :

$$B_o, B_f, {}^\circ B_o, \overline{B_f}, \overline{B_o}, {}^\circ B_f.$$

Exercice 2. On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et, pour $a, b \in \mathbb{R}$: $]b, +\infty[=]b, +\infty[\cup \{+\infty\}$, $[-\infty, a[= \{-\infty\} \cup]-\infty, a[$. On considère l'ensemble \mathcal{T} des parties de $\overline{\mathbb{R}}$ qui sont de la forme U , $U \cup]b, +\infty[$, $[-\infty, a[\cup U$ ou $[-\infty, a[\cup U \cup]b, +\infty[$, où U est un ouvert de \mathbb{R} .

- Montrer que \mathcal{T} est une topologie sur $\overline{\mathbb{R}}$. Montrer que la topologie induite sur \mathbb{R} est la topologie usuelle et que \mathbb{R} est dense dans $\overline{\mathbb{R}}$.
- Soit $(x_n)_n$ une suite réelle.
Montrer qu'on a $\lim x_n = +\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si : $\forall M > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N x_n > M$.
- Soit $f : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
À quelle condition, portant sur $g = f|_{\mathbb{R}}$ et $l = f(+\infty)$, la fonction f est-elle continue en $+\infty$?

Exercice 3. Pour $a \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{Z}^*$ on note $P_{a,r} = \{a + kr \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (progression arithmétique) et $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ l'ensemble des réunions d'ensembles $P_{a,r}$ (en incluant l'ensemble vide).

- Montrer l'intersection de deux progressions arithmétiques $P_{a,r}$, $P_{b,s}$ est soit vide, soit une progression arithmétique que l'on précisera.
- Montrer que \mathcal{T} est une topologie séparée sur \mathbb{Z} dont tous les ouverts non vides sont infinis. Montrer que les ensembles $P_{a,r}$ sont à la fois ouverts et fermés. Montrer que $n!$ converge vers 0 pour cette topologie.
- Soit \mathcal{P} l'ensemble des nombres premiers. Montrer que

$$\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \in \mathcal{P}} P_{0,p}.$$

En déduire que \mathcal{P} est infini.

Exercice 4. Soient E un EVN, A et B deux parties non vides de E . On définit $A + B$ par

$$A + B = \{x + y \mid (x, y) \in A \times B\}.$$

- On suppose que A est un ouvert de E . Montrer que $A + B$ est ouvert.
- On suppose que A est un fermé de E et que B est fini. Montrer que $A + B$ est fermé.
- Si B est fini, il est en particulier fermé. Le résultat de la question précédente est-il toujours vrai si on suppose seulement que A et B sont fermés ?

Exercice 5. On considère l'espace $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. On dit que $f \in E$ est positive, et on note $f \geq 0$, si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$. On dit qu'une forme linéaire $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ est positive si $f \geq 0 \Rightarrow \varphi(f) \geq 0$.

- Montrer qu'une forme linéaire positive est continue. On pourra considérer $g : x \mapsto \|f\| - f(x)$.
- Appliquer ce qui précède à $\varphi_1 : f \mapsto f(1)$ et $\varphi_2 : f \mapsto \int_0^1 f$.
Montrer directement que ces formes linéaires sont continues.

Exercice 6. On considère l'espace vectoriel $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$. Pour $f \in E$ on pose $\|f\| = \sup_{t \in [0, 1]} |tf(t)|$.

On définit par ailleurs des formes linéaires $\varphi, \psi : E \rightarrow \mathbb{R}$ en posant $\varphi(f) = \int_0^1 t^2 f(t) dt$ et $\psi(f) = f(0)$.

- Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E .
- Montrer que la forme linéaire φ est continue. Déterminer $\|\varphi\|$.
- La forme linéaire ψ est-elle continue? On pourra considérer les fonctions $f_n : t \mapsto (t + \frac{1}{n})^{-1}$.
- Les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes?

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel normé non nul et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $u \circ v - v \circ u = \lambda \text{Id}$.

- Montrer que $u \circ v^{n+1} - v^{n+1} \circ u = \lambda(n+1)v^n$ pour tout n .
- (i) On suppose que $v^n \neq 0$. Montrer que $(n+1)|\lambda| \leq 2\|u\|\|v\|$.
(ii) On suppose que $\lambda \neq 0$. Montrer qu'il existe n tel que $v^n = 0$. En déduire que $v = 0$.
(iii) Montrer qu'on a nécessairement $\lambda = 0$.
- On prend $E = C^\infty([0, 1])$, muni de la norme de la convergence uniforme $N = \|\cdot\|_\infty$.
On pose $u(f) = f'$ et $v(f) = (t \mapsto tf(t))$. Calculer $u \circ v - v \circ u$. Conclusion?

Exercice 8. On considère l'espace $H = L^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$. On note $\mathcal{L}(H)$ l'espace des applications linéaires continues de H dans H , muni de la norme d'opérateur.

Pour toute fonction mesurable $K : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, on souhaite construire l'opérateur à noyau $T : H \rightarrow H$ associé à K , donné par la formule

$$T(f)(s) = \int_0^\infty K(s, t) f(t) dt. \quad (1)$$

Il faut pour cela que l'intégrale converge pour presque tout s , et que $T(f)$ appartienne à $L^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. Dans la suite de l'exercice on pourra admettre que, sous les hypothèses faites, l'intégrale (1) converge pour presque tout s .

- On suppose tout d'abord que K appartient à $L^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.
Montrer que l'équation (1) définit un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\|T\| \leq \|K\|_2$.
- On suppose maintenant que K est à valeurs positives et qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ et $p, q : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ mesurables telles qu'on ait presque partout :

$$\int_0^\infty p(s) K(s, t) ds \leq \beta q(t) \quad \text{et} \quad \int_0^\infty K(s, t) q(t) dt \leq \alpha p(s).$$

- Montrer qu'on a pour toute fonction $f \in H$ et pour presque tout $s \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\left(\int_0^\infty K(s, t) f(t) dt \right)^2 \leq \alpha p(s) \int_0^\infty K(s, t) f(t)^2 q(t)^{-1} dt$$

On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

- En déduire que l'équation (1) définit un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\|T\| \leq \sqrt{\alpha\beta}$.
- On considère maintenant l'exemple donné par $K(s, t) = (1 + s + t)^{-1}$.
(i) Calculer la dérivée de $\varphi : x \mapsto \arctan(\sqrt{x}/\sqrt{a})$. En déduire que

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1 + s + t)\sqrt{t}} dt = \frac{\pi}{\sqrt{s+1}}.$$

- Montrer que pour ce noyau K l'équation (1) définit un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\|T\| \leq \pi$.
- Pour cet exemple, a-t-on $K \in L^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$?