

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

Exercice 1. Étudier la convergence des intégrales des fonctions suivantes sur les intervalles précisés :

- $a : x \mapsto \frac{\sqrt{x}^2}{x}$ entre 1 et $+\infty$,
- $b : x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}$ entre 1 et $+\infty$,
- $c : x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ entre 2 et $+\infty$,
- $d : x \mapsto \sqrt{x} \ln(x)$ entre 0 et 1,
- $e : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x}$ entre 0 et 1,
- $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 \ln x}$ entre 0 et $\frac{1}{2}$,
- $g : x \mapsto \ln(2x)$ entre 0 et 1,
- $h : x \mapsto \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}$ entre 1 et 2,
- $i : x \mapsto \exp(-3x)$ entre 0 et $+\infty$,
- $j : x \mapsto \exp(-2 \ln x)$ entre 1 et $+\infty$,
- $k : x \mapsto \frac{x}{(\ln x)^2}$ entre 0 et $+\infty$.

Exercice 2. Étudier la convergence des intégrales des fonctions suivantes sur les intervalles précisés :

- $a : x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x^3-1}}$ sur $[1, +\infty[$,
- $b : x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x^3+x^2+1}}$ sur $[1, +\infty[$,
- $c : x \mapsto \arctan e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$,
- $d : x \mapsto \frac{\arctan x}{x \ln(1+x^2)}$ sur $[1, +\infty[$,
- $e : x \mapsto \sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln x}$ sur $[1, +\infty[$,
- $f : x \mapsto \arccos\left(\frac{x-1}{x}\right)$ sur $[1, +\infty[$,
- $g : x \mapsto x + 1 - \sqrt{x^2 + 2x}$ sur $[1, +\infty[$,
- $h : x \mapsto \frac{\cos x}{\sqrt{x+x^2}}$ sur $]0, 1]$,
- $i : x \mapsto \frac{1}{e^x - \cos x}$ sur $]0, 1]$,
- $j : x \mapsto \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^{5/2}}$ sur $]0, 1]$,
- $k : x \mapsto \frac{1}{1-\sqrt{x}}$ sur $[0, 1[$,
- $l : x \mapsto 1 + x \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3. Étudier la convergence des intégrales des fonctions suivantes sur les intervalles précisés :

- $a : x \mapsto \sqrt{-\ln x}$ sur $]0, 1]$,
- $b : x \mapsto x^2 \exp(-x)$ sur $[0, +\infty[$,
- $c : x \mapsto x(\sin x)e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$,
- $d : x \mapsto \exp(-\sqrt{\ln x})$ sur $[1, +\infty[$,
- $e : x \mapsto x \exp(-\sqrt{x})$ sur $[0, +\infty[$,
- $f : x \mapsto \exp(-x \arctan x)$ sur $[0, +\infty[$,
- $g : x \mapsto \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$ sur $[2, +\infty[$,
- $h : x \mapsto (\operatorname{ch} \sqrt{\ln x})^{-2}$ sur $[2, +\infty[$.

Exercice 3. Étudier la convergence des intégrales des fonctions suivantes sur les intervalles précisés :

- $a : x \mapsto \sin(x^2)e^{-2x}$ sur $[0, +\infty[$,
- $b : x \mapsto \frac{\cos x}{x\sqrt{x}}$ sur $[1, +\infty[$,
- $c : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $]0, 1]$,
- $d : x \mapsto \frac{1}{x} \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $[1, +\infty[$,
- $e : x \mapsto \frac{\sin(1+x^2)}{1+x^2}$ sur $[0, +\infty[$,
- $f : x \mapsto \sin(\ln x)$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 4. Discuter, suivant la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence des intégrales suivantes :

- $I = \int_0^{+\infty} x^\alpha \arctan(x) dx$,
- $J = \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^\alpha} dx$,
- $K = \int_0^{+\infty} x^\alpha \ln(x + e^{\alpha x}) dx$.

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes, après avoir justifié leur convergence :

- $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}} dx.$
- $J = \int_0^{+\infty} x e^{-\sqrt{x}} dx.$
- $K = \int_0^1 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx.$

Exercice 6. Pour tout $a > 0$ on pose $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{a^2+x^2} dx.$

- a. Justifier l'existence de $I(a)$ pour tout $a > 0$.
- b. En effectuant le changement de variable $x = 1/y$, montrer que $I(1) = 0$.
- c. En effectuant le changement de variable $x = ay$, déterminer la valeur de $I(a)$ pour tout $a > 0$.

Exercice 7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère les intégrales

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^n)} \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n dx}{(1+x^2)(1+x^n)}.$$

- a. Justifier l'existence de I_n et J_n pour tout n .
- b. Montrer que $I_n + J_n = \frac{\pi}{2}$ pour tout n .
- c. À l'aide du changement de variable $x = 1/y$, déterminer les valeurs de I_n et J_n pour tout n .

Exercice 8. On cherche à calculer l'intégrale de Gauss $G = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$

- a. On rappelle qu'on a $e^t \geq 1+t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\forall u \in [0, n] \quad \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \leq e^{-u} \quad \text{et} \quad \forall u \geq 0 \quad e^{-u} \leq \left(1 + \frac{u}{n}\right)^{-n}.$$

- b. Démontrer qu'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx \leq G \leq \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx.$$

On appelle I_n, J_n les intégrales aux membres de gauche et de droite.

- c. Grâce à des changements de variables appropriés, relier I_n et J_n aux intégrales de Wallis $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx.$
- d. On rappelle que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. Montrer que $G = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$