Dérivées partielles et recherche d'extrémums

Exercice 1. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :
- $f : (x, y) \mapsto x^2y + 2x - 3y + 12$,
- $f : (x, y) \mapsto 2xy^3 + 3xy - y$,
- $f : (x, y) \mapsto xy\cos(y) + \sin(xy)$,
- $f : (x, y) \mapsto e^{xy} + (x - y)^2$,
- $f : (x, y) \mapsto \dfrac{x + 2y}{x^2 + y^2 + 1}$,
- $f : (x, y, z) \mapsto x^2z + xyz + yz^2$.

Exercice 2. On définit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en posant $f(0, 0) = 1$ et, pour $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + xy + y^2}.$$

a. Vérifier que f est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

b. En étudiant la restriction de f aux droites d'équation $y = ax$, montrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

c. Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à x et y en $(0, 0)$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x^3 - \sin y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

b. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ et les calculer.

c. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, x)$ pour tout $x \neq 0$ et en déduire que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

d. En considérant $f(x, -x)$, montrer que f n'est même pas différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 4. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie comme suit :

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|} + (x + 1)^2 + y.$$

a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle admet des dérivées partielles par rapport à x et y en tout point (x, y) tel que $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

b. Montrer que f admet en $(0, 0)$ des dérivées partielles par rapport à x et y qu'on calculera.

c. Étudier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(a, 0)$ pour $a \neq 0$.

Exercice 5. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0, 0) = 0$ et $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$.

a. Montrer que f est continue en $(0, 0)$.

b. Calculer les dérivées partielles de f en $(x, y) \neq (0, 0)$.

c. Montrer que les dérivées partielles de f en $(0, 0)$ existent, et donner leurs valeurs.

d. Que vaut $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en $(x, 0)$? en $(0, y)$? La fonction f est-elle de classe C^1 ?

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, dont on note u, v, w les variables.

a. Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(t) = f(t^2, t^4, e^t)$. Montrer que φ est dérivable. Pour tout nombre réel t, exprimer $\varphi'(t)$ au moyen des dérivées partielles de f.

b. Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x, y) = f(x\sin(y), xy^2, x + y^2)$. Montrer que g est de classe C^1 et calculer les dérivées partielles de g.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y, z) = x^{y^z}$.

a. Montrer que la fonction f est de classe C^1 et calculer les dérivées partielles de f.

b. Soit $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = x^{x^x}$.
Montrer que g est dérivable et calculer $g'(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 8. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \sin(x + g(y^2, x)).$$

Montrer que f est de classe C^1 et calculer ses dérivées partielles en fonction de celles de g.
On notera u, v les variables de g.

Exercice 9. Soit S la surface d'équation $z = x - 2(x^2 + y^2)^2$, c'est-à-dire

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \, z = x - 2(x^2 + y^2)^2\}.$$

a. Soit $(a, b, c) \in S$. Écrire l'équation du plan tangent à S au point (a, b, c).
En quels points le plan tangent à S est-il horizontal ?

b. Montrer qu'au voisinage du point $(0, 0, 0)$, la surface est en dessous de son plan tangent.

Exercice 10. Soit S la surface d'équation $z = f(x, y) = (1 + x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2$.

a. Déterminer les points critiques de f. En quels points le plan tangent à S est-il horizontal ?

b. En chacun de ces points, quelle est la position de S par rapport à son plan tangent ?
Déterminer les extrémums locaux et globaux de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11. On introduit un sous-ensemble $F \subset \mathbb{R}^2$ et une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en posant

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, \ y \geq 0, \ x + y \leq 1\} \quad \text{et} \quad f(x, y) = xy(1 - x - y).$$

a. (i) Représenter F, montrer qu'il est compact.
(ii) En déduire que f est bornée et atteint ses bornes sur F.
(iii) Montrer que $f(x, y) \geq 0$ pour tout $(x, y) \in F$.
Représenter sur un dessin les points $(x, y) \in F$ pour lesquels $f(x, y) = 0$.
(iv) Quelle est le minimum de f sur F ? En quel(s) point(s) est-il atteint ?

b. (i) Calculer les dérivées partielles de f par rapport à x et y.
(ii) Déterminer les 4 points critiques de f.

c. Quel est le maximum de f sur F ? En quel(s) point(s) de F est-il atteint ? Justifier.

Exercice 12. On note $\bar{B}$ (resp. B) la boule unité fermée (resp. ouverte) de $\mathbb{R}^2$ et on considère la fonction $f : \bar{B} \to \mathbb{R}$ définie par la formule $f(x, y) = x^2 + y^4$.

a. Montrer que f admet un minimum global et un maximum global sur $\bar{B}$.

b. Déterminer les points critiques de f sur B.

c. Montrer que le minimum global de f sur $\bar{B}$ est atteint en $(0, 0)$ uniquement.

d. À l'aide des questions 1 et 2, montrer que le maximum global de f sur $\bar{B}$ est atteint sur $\bar{B} \setminus B$.

e. On pose $g(\theta) = f(\cos(\theta), \sin(\theta))$.
Rechercher les anulations de g' et calculer les valeurs correspondantes de g.
Quels sont les extrémums de g ?

f. À l'aide des questions d et e, déterminer le maximum de f sur $\bar{B}$ et les points où il est atteint.

g. Retrouver directement le résultat de la question précédente.