Université de Caen
UFR Sciences
M1 Maths

2e semestre 2017-2018
Mathématiques
Analyse fonctionnelle

Opérateurs sur un espace de Hilbert

Exercice 1. Soit (Ω, μ) un espace mesuré et $H = L^2(\Omega, \mu)$ muni de sa structure hilbertienne usuelle. On fixe $K \in L^2(\Omega \times \Omega, \mu \times \mu)$ et pour toute $f \in H$ on définit $T(f) \in H$ en posant

$$T(f)(s) = \int_\Omega K(s,t) f(t) \mathrm{d}\mu(t).$$

On rappelle que T est alors un opérateur borné de H dans H.
Pout $t \in \Omega$ fixé on note $K_t : \Omega \to \mathbb{C}$, $s \mapsto K(t,s)$. On fixe une base hilbertienne $(e_n)_n$ de H.

a. Montrer que $\|K\|_2^2 = \int_\Omega \|K_t\|_2^2 \mathrm{d}\mu(t) = \int_\Omega \sum_n |(\bar{e}_n|K_t)|^2 \mathrm{d}\mu(t)$.
b. Montrer que $\sum_n \|Te_n\|^2 = \|K\|_2^2 < +\infty$. On dit que T est un opérateur de Hilbert-Schmidt.
On pourra vérifier que $T(f)(s) = (\bar{f}|K_s)$.
c. Peut-on trouver un noyau $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$ tel que l'opérateur T associé soit inversible ?

Exercice 2. On considère $H = L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ muni du produit scalaire hermitien $(f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t) \mathrm{d}t$. On note K le sous-espace fermé engendré par les fonction $e_n : t \mapsto e^{int}$, $n \geq 0$ et P la projection orthogonale sur K.
Par ailleurs on note C l'espace des fonctions $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ continues et telles que $f(-\pi) = f(\pi)$. Pour $f \in C$ et $g \in K$ on note $T_f(g) = P(fg)$.

a. Montrer que T_f est un opérateur borné sur K.
b. Pour $i, j \in \mathbb{N}$ exprimer $(e_i|T_f e_j)$ à l'aide des coefficients de Fourier de f.
En déduire que $T_f = T_g \Rightarrow f = g$.
c. Montrer que $T_f^* = T_{\bar{f}}$.

Exercice 3. Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur borné tel que $T^* = T$.

a. Rappeler la définition de $|T|$. Montrer que $\operatorname{Ker}|T| = \operatorname{Ker} T$. *On pourra calculer* $\||T|(x)\|^2$.
b. Montrer que $(T - |T|)(T + |T|) = 0$.
c. On note $K_+ = \operatorname{Ker}(T + |T|)^\perp$, $K_- = \operatorname{Ker}(T - |T|)^\perp$.
Montrer que $K_+ \perp K_-$, puis que $K_+^\perp \cap K_-^\perp = \operatorname{Ker} T$.
On a ainsi une décomposition en somme directe orthogonale $H = K_- \oplus \operatorname{Ker} T \oplus K_+$.
d. Montrer que $T = |T|$ sur $K_+ \oplus \operatorname{Ker} T$ et $T = -|T|$ sur $K_- \oplus \operatorname{Ker} T$.
Montrer que $T(K_+) \subset K_+$ et $T(K_-) \subset K_-$.
e. Montrer qu'il existe deux opérateurs **positifs** T_+, $T_- \in \mathcal{L}(H)$ tels que $T = T_+ - T_-$ et $|T| = T_+ + T_-$.
f. Montrer que $T \leq |T|$.

Exercice 4. *(Examen 2017)* On considère l'espace $H = L^2([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$. On note $\mathcal{L}(H)$ l'espace des applications linéaires continues de H dans H, muni de la norme d'opérateur.
Pour toute fonction $K \in L^2([0,1]^2, \mathbb{R})$, on considère l'*opérateur à noyau* associé $T : H \to H$, donné par la formule

$$T(f)(s) = \int_0^1 K(s,t) f(t) \mathrm{d}t.$$

a. Montrer que T est une application linéaire continue et que $\|T\| \leq \|K\|_2$.
b. Montrer que l'adjoint T^* de T est un opérateur à noyau.
On précisera quel est le noyau $K^* : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ correspondant à T^*.
c. Soit T_1, T_2 les opérateurs à noyaux associés à deux fonctions K_1, $K_2 \in C([0,1]^2, \mathbb{R})$.
Montrer que $T_3 = T_1 \circ T_2$ est encore un opérateur à noyau. *On exprimera la fonction K_3 correspondante comme une intégrale à paramètres faisant intervenir K_1 et K_2.*
d. On considère le cas où $K_1(s,t) = t^s$ et $K_2(s,t) = s^t$, en convenant que $0^0 = 0$.
Calculer le noyau K_3 correspondant à $T_1 \circ T_2$.
e. On considère le noyau $K : (s,t) \mapsto (s + t + 1)^{-1}$.
Montrer que l'opérateur à noyau T associé à K est un opérateur positif.

Exercice 5. Soit X un espace topologique compact muni d'une mesure borélienne μ, et $H = L^2(\Omega, \mu)$ muni de sa structure hilbertienne usuelle. On fixe $f \in C(X, \mathbb{C})$ et on considère l'opérateur $M : H \to H$, $\xi \mapsto f\xi$.

On suppose de plus que $\mu(B(t, \epsilon)) > 0$ pour tout $t \in X$ et tout $\epsilon > 0$ (μ est de « support plein ») — on pourra penser par exemple à la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$.

a. Vérifier que M est borné et déterminer M^*.

b. On suppose que f ne s'annule pas. Montrer que M est inversible et déterminer M^{-1}.

c. On suppose que f s'annule en $t_0 \in X$.

  (i) On fixe $\epsilon > 0$. Trouver une fonction $\xi \in H$ telle que $\|\xi\|_2 = 1$ et $\|M\xi\|_2 \leq \epsilon$.

  (ii) Montrer par l'absurde que M n'est pas inversible.

d. Montrer que le spectre de T est égal à $f(X)$.

Exercice 6. On considère $H = \ell^2(\mathbb{N})$ muni de sa base canonique $(e_n)_n$ et l'opérateur « de décallage » $S : H \to H$ donné par $S(e_k) = e_{k+1}$.

a. Déterminer S^* et $\|S\|$.

b. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ l'application $S - \lambda\mathrm{Id}$ est injective.
Autrement dit S n'admet pas de valeur propre.

c. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > 1$. Monter que $S - \lambda\mathrm{Id}$ est inversible.

d. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| \leq 1$. Déterminer $\mathrm{Im}(S - \lambda\mathrm{Id})^\perp$.

e. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$. On considère $x_n = (n+1)^{-1/2} \sum_{k=0}^{n} \lambda^{-k} e_k$.

  (i) Montrer que $\lim_{n\infty}(S(x_n) - \lambda x_n) = 0$.

  (ii) Montrer que $S - \lambda\mathrm{Id}$ n'est pas bijective.

f. Déterminer le spectre de S.