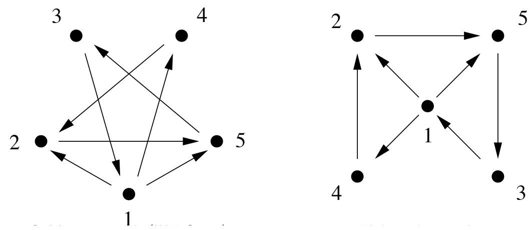
Université de Caen
UFR de Droit et Sciences Politiques
L1 AES

2017-2018
Mathématiques
2e semestre

Fiche de TD n° 4

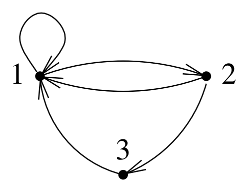
Objectifs : savoir passer d'un graphe orienté à sa matrice d'adjacence et inversement; savoir dénombrer les chemins de longueur donnée d'un sommet à un autre dans un graphe; savoir tester sur sa matrice d'adjacence le fait qu'un graphe est fortement connexe.

Exercice 1. Donner les matrices d'adjacence des deux graphes suivants, et commenter.



Exercice 2.

a. Donner la matrice d'adjacence A du graphe suivant :



b. Donner la matrice d'adjacence A' du graphe obtenu à partir du précédent en renumérotant respectivement 2 et 1 les sommets 1 et 2.

c. On pose $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $PA' = AP$; interpréter cette égalité.

d. Donner la matrice d'adjacence A'' du graphe obtenu à partir du graphe de départ en renumérotant respectivement 2, 3 et 1 les sommets 1, 2 et 3.

e. Trouver une matrice Q telle que $QA'' = AQ$.

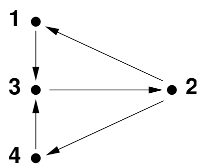
Exercice 3.

a. Dessiner le graphe $\mathbb{G}$ dont la matrice d'adjacence est $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b. Vérifier que A est primitive, c'est-à-dire qu'il existe une puissance de A dont tous les coefficients sont strictement positifs.

c. Interpréter sur le graphe $\mathbb{G}$ le fait que A est primitive.

Exercice 4. On considère le graphe $\mathbb{G}$ suivant :



a. Donner sa matrice d'adjacence A.

b. Calculer A^2 et A^3.

c. Calculer $A + A^2 + A^3$ et vérifier que tous ses coefficients sont strictement positifs.

d. Interpréter la propriété précédente sur le graphe $\mathbb{G}$ (on dit que $\mathbb{G}$ est fortement connexe).

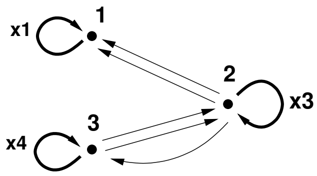
e. Vérifier que $A^4 = 2A$. La matrice A est-elle primitive ?

Exercice 5. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, la première colonne de A^n est nulle.

b. Dessiner le graphe dont la matrice d'adjacence est A. Est-il fortement connexe ?

Exercice 6. On considère le graphe $\mathbb{G}$ suivant :



a. Écrire la matrice d'adjacence A du graphe $\mathbb{G}$.

b. Calculer A^2.
Combien y a-t-il de chemins de longueur 2 allant du sommet 2 vers le sommet 1 ? vers le sommet 3 ?

c. Calculer A^5. (Cf fiche n^{o} 3.)
Combien y a-t-il de chemins de longueur 5 allant du sommet 2 vers le sommet 1 ? vers le sommet 3 ?

Exercice 7. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Dessiner le graphe $\mathbb{G}$ dont la matrice d'adjacence est A.

b. Calculer A^2.

c. Donner le nombre de chemins de longueur 2 dans $\mathbb{G}$ menant du sommet 1 vers le sommet 2.

d. Calculer le polynôme caractéristique de A et vérifier qu'il s'écrit $P_A(x) = x^3 - 5x^2 + 4x$.

e. Trouver les trois valeurs propres de A.

f. Trouver les nombres α, β et γ tels que chaque valeur propre r de A vérifie $r^7 = \alpha r^2 + \beta r + \gamma$.

g. On rappelle qu'on a alors $A^7 = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I$. Écrire la matrice A^7.

h. En déduire le nombre de chemins de longueur 7 dans $\mathbb{G}$ menant du sommet 1 vers le sommet 2.

Exercice 8. *(Examen 2017)*

a. Dessiner le graphe orienté $\mathbb{G}$ dont la matrice d'adjacence est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Un logiciel de calcul donne les valeurs suivantes pour les premières puissances de A :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A^4 = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 6 & 4 \\ 10 & 15 & 4 & 16 \\ 8 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix};$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 14 & 23 & 4 & 26 \\ 30 & 29 & 16 & 24 \\ 12 & 19 & 4 & 21 \\ 8 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}; \quad A^6 = \begin{pmatrix} 46 & 41 & 26 & 32 \\ 58 & 75 & 24 & 76 \\ 38 & 35 & 21 & 28 \\ 12 & 19 & 4 & 21 \end{pmatrix}; \quad A^7 = \begin{pmatrix} 82 & 113 & 32 & 118 \\ 150 & 157 & 76 & 140 \\ 70 & 94 & 28 & 97 \\ 38 & 35 & 21 & 28 \end{pmatrix}.$$

Trouver le plus petit entier l tel que, d'un sommet vers un autre du graphe $\mathbb{G}$, il existe toujours un chemin de longueur l.
Trouver le plus petit entier m tel que, d'un sommet vers un autre du graphe $\mathbb{G}$, il existe toujours un chemin de longueur inférieure ou égale à m.