Analyse 3
Contrôle Intermédiaire
Corrigé commenté

Question de cours.

Attention, le « lemme des gendarmes » n'est d'aucune utilité pour cette preuve : l'encadrement $0 \leq F(t) \leq CG(t) \leq Cl$ ne permet pas de conclure à la convergence de $F(t)$ quand $t \to 1^-$, car $G(t)$ n'a aucune raison de tendre vers 0 (et Cl encore moins). Ici la convergence de $F(t)$ est assurée par le fait que F est croissante *et majorée (par Cl).*

Le « lemme des gendarmes » est un résultat précis, avec des hypothèses précises, qui permet dans certaines situations de montrer l'existence de limite pour des suites ou des fonctions, mais pas la convergence d'intégrales.

Exercice 1

1. (a) En $+\infty$ on a $1 = o(\sqrt{x})$ donc $1 + \sqrt{x} \sim \sqrt{x}$. Comme les deux termes tendent vers $+\infty$, on peut prendre le log de cet équivalent : $\ln(1 + \sqrt{x}) \sim \ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$.
   Par ailleurs on a $2x = o(x^2)$ en $+\infty$ donc $x^2 + 2x \sim x^2$ et en faisant le quotient des équivalents on obtient $f(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{2}\ln(x)/x^2$.

   (b) Quand x tend vers 0^+, la quantité $t = \sqrt{x}$ tend vers 0 et on peut donc appliquer l'équivalent usuel $\ln(1 + t) \sim_0 t$. On obtient $\ln(1 + \sqrt{x}) \sim \sqrt{x}$ en 0^+.
   Par ailleurs on a $x^2 = o(2x)$ en 0 donc $x^2 + 2x \sim 2x$ et en faisant le quotient $f(x) \sim_{0^+} 1/2\sqrt{x}$.
   Attention, on n'a pas $2x \sim x$: faire le quotient pour s'en assurer !

   (c) Tout d'abord on remarque que la fonction f est positive sur $]0, +\infty[$ car $\ln(t)$ est positif pour $t \geq 1$. On va donc pouvoir appliquer le théorème de comparaison par équivalents.
   L'équivalent trouvé au (a) est de la forme $C/x^\alpha \ln(x)^\beta$, on sait que l'intégrale correspondante converge en $+\infty$ car $\alpha = 2 > 1$. Donc l'intégrale de f converge en $+\infty$.
   L'équivalent trouvé au (b) est de la forme C/x^α, on sait que l'intégrale correspondante converge en 0^+ car $\alpha = \frac{1}{2} < 1$. Donc l'intégrale de f converge en 0^+.

2. (a) Quand x tend vers 0^+ on a $\ln x \to -\infty$, donc $-(\ln x)^2 \to -\infty$. Comme l'exponentielle tend vers 0 en $-\infty$, on en déduit $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$. On a une limite finie en une borne finie : l'intégrale de g converge trivialement en 0^+.

   (b) Pour $t \geq 2$ on a $1 - t \leq -1$. En multipliant par t, qui est positif, on obtient $t - t^2 \leq -t$. En prenant l'exponentielle, qui est croissante, on obtient $e^{t-t^2} \leq e^{-t}$.
   Remarque : ce n'est pas une équivalence. En étudiant le signe du trinôme $t^2 - 2t$ on se rend compte que $e^{t-t^2} \leq e^{-t} \Leftrightarrow (t \geq 2$ ou $t \leq 0)$.

   (c) On procède au changement de variable $t = \ln(x)$. On a alors $x = e^t$ et $\mathrm{d}x = e^t\mathrm{d}t$. De plus, quand x tend vers $+\infty$, t aussi. Donc l'intégrale de g en $+\infty$ est de même nature que l'intégrale de $e^{-t^2}e^t$ en $+\infty$.
   D'après (b) on a $e^{-t^2}e^t = e^{t-t^2} \leq e^{-t}$. L'intégrale de e^{-t} converge en $+\infty$ (intégrale de référence). Comme les exponentielles sont positives, on peut appliquer le théorème de comparaison par inégalité et on en déduit que l'intégrale de $e^{-t^2}e^t$ converge en $+\infty$.
   Finalement l'intégrale de g converge en $+\infty$.
   Remarque. On ne peut pas conclure en écrivant $0 \leq \int_1^X g(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\ln X} e^{-t^2}e^t\mathrm{d}t \leq \int_0^{\ln X} e^{-t}\mathrm{d}t$, puis en invoquant un « théorème de comparaison » ou un « lemme des gendarmes ». En effet dans le théorème de comparaison on compare les fonctions, pas leurs intégrales. Et dans le lemme des gendarmes, il faut que les deux membres de l'encadrement aient la même limite.
   Par contre, on pouvait appliquer le (b) sous la forme $e^{-t^2} \leq e^{-2t}$, en posant $t = \ln(x)$ mais sans faire de changement de variable dans l'intégrale, puis conclure directement par le théorème de comparaison par inégalité, puisque l'intégrale de $e^{-2t} = 1/x^2$ converge en $+\infty$.

3. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|\cos(x)| \leq 1$, donc $|\cos(x)/x(\ln x)^2| \leq 1/|x(\ln x)^2| = 1/x(\ln x)^2$. On sait que l'intégrale de $1/x(\ln x)^2$ converge en $+\infty$: intégrale de Bertrand avec $\alpha = 1$ et $\beta = 2 > 1$. Le théorème de comparaison par inégalité s'applique car les fonctions sont positives et on en déduit que l'intégrale de $|\cos(x)/x(\ln x)^2|$ converge en $+\infty$. Autrement dit, l'intégrale de $\cos(x)/x(\ln x)^2$ converge absolument en $+\infty$, donc elle converge.

   (b) *Il s'agit d'une intégrale semi-convergente comme celle de* $\sin(x)/x$ *vue en cours. On applique la même technique : IPP.*

   La formule d'intégration par parties, avec $u(x) = 1/\ln(x)$ et $v'(x) = \sin(x)$, montre que l'intégrale de h converge en ∞ si le crochet $[uv]$ et l'intégrale de $u'v$ convergent en $+\infty$. On a $u(x)v(x) = -\cos(x)/\ln(x)$ qui tend vers 0 en $+\infty$, et $u'(x)v(x) = \cos(x)/x(\ln x)^2$ dont l'intégrale converge en $+\infty$ d'après (a). Donc l'intégrale de h converge en $+\infty$.

   Remarque. Si on voulait justifier plus précisément la convergence de $u(x)v(x)$ *vers* 0*, on pouvait (seulement ici !) appliquer le « lemme des gendarmes » : on a* $-1/\ln(x) \leq -\cos(x)/\ln(x) \leq 1/\ln x$ *et les deux membres extérieurs de l'encadrement tendent vers la même limite* 0 *en* $+\infty$.

Exercice 2

1. Pour tout $t \geq 1$ on a $\frac{1}{t} \leq 1$ donc, comme $|f(t)|$ est positif : $|f(t)/t| = |f(t)|/t \leq |f(t)|$. Par hypothèse, l'intégrale de $|f(t)|$ converge en $+\infty$. Le théorème de comparaison par inégalité s'applique car les fonctions comparées sont positives. On en déduit que l'intégrale de $|f(t)/t|$ converge en $+\infty$. Autrement dit, l'intégrale de $f(t)/t$ converge absolument en $+\infty$, donc elle converge.

2. (a) *Les deux ingrédients importants sont la continuité de* F *et le fait que* F *admet une limite finie en* $+\infty$*. La rédaction suivante est concise mais suffisante à ce stade :*

   La convergence de l'intégrale de f en $+\infty$ équivaut au fait que sa primitive F admet une limite finie l en $+\infty$. En particulier F est bornée au voisinage de $+\infty$, c'est-à-dire sur un intervalle du type $[C, +\infty[$. Par ailleurs F est dérivable, donc continue, donc d'après le théorème des bornes elle est bornée sur l'intervalle *fermé borné* $[1, C]$.

   Plus précisément, la définition de la limite $l = \lim_{t\to+\infty} F(t)$ *pour la valeur* $\varepsilon = 1$ *(par exemple) montre l'existence d'un réel* $C \geq 1$ *tel que* $|F(t) - l| \leq 1$ *pour tout* $t \geq C$*. Cela implique, par l'inégalité triangualure « gauche » :* $|F(t)| \leq l + 1$ *pour tout* $t \geq C$*. Si on pose* $L = \max_{t\in[1,C]} |F(t)|$*, ce qui est licite par le théorème des bornes et par continuité de* $|F|$*, il suffit alors de prendre* $M = \max(l + 1, L)$ *pour vérifier que* F *est bornée sur* $[1, +\infty[$.

   (b) D'après (a), pour tout $t \geq 1$ on a $|F(t)/t^2| = |F(t)|/t^2 \leq M/t^2$. On sait que l'intégrale de M/t^2 converge en $+\infty$, et les fonctions sont positives donc on peut appliquer le théorème de comparaison par inégalité. Cela montre que l'intégrale de $F(t)/t^2$ converge absolument en $+\infty$, donc elle converge.

   (c) On procède à une intégration par parties avec $u(t) = 1/t$ et $v'(t) = f(t)$. On a $|u(t)v(t)| = |F(t)/t| \leq M/t$ donc, d'après le lemme des gendarmes, le crochet $[uv]$ converge en $+\infty$. De plus d'après (b) l'intégrale de $u'(t)v(t) = -F(t)/t^2$ converge en $+\infty$. Donc l'intégrale de $u(t)v'(t) = f(t)/t$ converge en $+\infty$.

3. La fonction $f = h$ de l'exercice 1 convient. On a montré en effet que son intégrale converge en $+\infty$, et on admet que ni son intégrale, ni celle de $h(t)/t$ ne convergent absolument en $+\infty$.

   Ici il fallait au moins proposer une fonction f *qui n'est pas de signe constant au voisinage de* $+\infty$*, sinon il n'y a aucune chance que son intégrale converge en* $+\infty$ *sans converger absolument !*

   Comme pour $\sin(t)/t$*, la non-convergence absolue des intégrales de* $h(t)$ *et* $h(t)/t$ *peut être justifiée en partant de l'astuce vue en cours :* $|\sin(t)| \geq (\sin t)^2 = (1 - \cos(2t))/2$*...*