Université de Caen — 1er semestre 2018-2019
UFR Sciences

Licence Mathématiques – Année L2
Contrôle continu – 15 Octobre 2018 – Analyse
Durée : 2 heures

Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.
Les exercices sont indépendants.
La précision des justifications et des raisonnements sera un élément d'appréciation important lors de la correction.

Question de cours. *(3 points)* Démontrer le résultat suivant :
Soit $f, g : [0,1[\to \mathbb{R}$ des fonctions continues par morceaux. On suppose qu'il existe $a \in [0,1[$ et $C > 0$ tels que $0 \leq f(t) \leq Cg(t)$ pour tout $t \in [a,1[$. Si l'intégrale de g converge en 1^- alors celle de f aussi.

Exercice 1 *(11 points)* On considère les fonctions

$$f :]0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x^2+2x}$$
$$g :]1,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-(\ln x)^2}$$
$$h : [2,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\sin(x)}{\ln(x)}.$$

1. Dans cette question l'expression « équivalent simple » en 0^+ ou $+\infty$ désigne une fonction de la forme $C/x^\alpha(\ln x)^\beta$ (avec éventuellement $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$).
   (a) Déterminer un « équivalent simple » de $f(x)$ en $+\infty$.
   (b) Déterminer un « équivalent simple » de $f(x)$ en 0^+.
   (c) L'intégrale de f converge-t-elle en 0^+ ? en $+\infty$? Justifier.
2. (a) L'intégrale de g converge-t-elle en 0^+ ?
   (b) Montrer que pour tout $t \geq 2$ on a $e^{t-t^2} \leq e^{-t}$.
   (c) L'intégrale de g converge-t-elle en $+\infty$?
   On pourra procéder à un changement de variable.
3. (a) Justifier la convergence de l'intégrale de $\dfrac{\cos(x)}{x(\ln x)^2}$ en $+\infty$.
   (b) Étudier la convergence de l'intégrale de h en $+\infty$.
   On pourra s'inspirer d'un exemple classique vu en cours.

Exercice 2 *(7 points)*
Dans cet exercice $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue quelconque. *On ne suppose pas que f est positive.*

1. On suppose dans cette question que l'intégrale de f converge *absolument* en $+\infty$.
   Montrer que l'intégrale de $\frac{f(t)}{t}$ converge en $+\infty$.
2. On suppose maintenant que l'intégrale de f converge en $+\infty$, mais pas forcément absolument.
   On note $F : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ une primitive de f.
   (a) Montrer que F est bornée.
   Autrement dit, il existe une constante $M \geq 0$ telle que $|F(x)| \leq M$ pour tout $x \in [1,+\infty[$.
   (b) Montrer que l'intégrale de $\frac{F(t)}{t^2}$ converge en $+\infty$.
   (c) À l'aide de la question précédente, montrer que l'intégrale de $\frac{f(t)}{t}$ converge en $+\infty$.
3. *Question subsidiaire.* Donner un exemple d'une fonction f telle que l'intégrale de f converge en $+\infty$, mais ni l'intégrale de f ni celle de $\frac{f(t)}{t}$ ne convergent absolument. *On ne demande pas de justifier en détail la non-convergence absolue.*