L2 Mathématiques – 1er semestre
Contrôle continu – Analyse
10 décembre 2018 – 2 heures

Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.
Le barème tiendra compte de la longueur du sujet, et une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction et au soin de la copie. Les exercices sont indépendants.

Question de cours. *(2 points)*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, O_1, ..., O_n des ouverts de $\mathbb{R}^2$ et $O = O_1 \cap \cdots \cap O_n$ leur intersection. Montrer que O est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1 On considère la courbe paramétrée $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ donnée par

$$x(t) = \frac{t-2}{\sqrt{t^2+1}}, \qquad y(t) = t^3 - 3t - 2.$$

1. Justifier que x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et dresser les tableaux de variations de x et y. On précisera les limites aux bornes.
2. Y a-t-il des points singuliers ? Si oui lesquels ?
3. Donner des vecteurs directeurs des tangentes à la courbe aux points de paramètre $t = 0$ et $t = 2$.
4. La courbe admet-elle des asymptotes ? Si oui, les déterminer.
5. Tracer l'allure de la courbe. On fera apparaître les asymptotes (horizontales, verticales ou obliques), ainsi que les éventuelles tangentes verticales et horizontales à la courbe. Il n'est pas attendu que le tracé soit précis, mais qu'il soit compatible avec les calculs effectués précédemment notamment sur les variations de x et y. On donne les valeurs approchées : $\frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0,707$, $\frac{3}{\sqrt{2}} \simeq 2,12$, $\sqrt{5} \simeq 2,23$.

Exercice 2 On considère les sous-ensembles suivants du plan $\mathbb{R}^2$:

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 6\}, \quad F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 6\}, \quad O = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 6\}.$$

On définit une fonction $f : F \to \mathbb{R}$ en posant $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4xy$.

1. (a) Représenter E, F et O. Montrer que F est fermé et que O est ouvert.
   (b) Montrer que f admet un maximum et un minimum globaux sur F.
   On ne cherchera pas à les déterminer.
2. On recherche les extrémums de f sur O.
   (a) Rechercher les points critiques de f sur O.
   (b) Vérifier que les fonctions $g : t \mapsto f(t,t)$ et $h : t \mapsto f(t,-t)$ admettent chacune un extrémum global en 0. S'agit-il pour g d'un maximum ou d'un minimum ? et pour h ?
   (c) Montrer que f n'admet pas d'extrémum local dans O.
3. (a) Déterminer les extrémums de la fonction $\varphi : t \mapsto f(\sqrt{6}\cos(t), \sqrt{6}\sin(t))$.
   (b) Déterminer les valeurs des extrémums globaux de f sur F.
   On utilisera les questions précédentes.

Exercice 3 On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,y) = y^2$ et $f(x,y) = x \sin\left(\dfrac{y^2}{x}\right) + x|y| + \sin(x)\cos(y)$ pour $x \neq 0$.

1. Montrer que les dérivées partielles de f en $(0,0)$ existent, et donner leurs valeurs.
2. Étudier l'existence des dérivées partielles de f en $(a,0)$, avec $a \neq 0$.