# Espaces vectoriels normés et topologie

**Exercice 1.** On munit les $\mathbb{R}$-EVN $\mathbb{R}^n$ et $M_n(\mathbb{R})$ de la topologie associée à n'importe quelle norme.

a. Montrer que $\mathbb{Z}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

b. Montrer que $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y < 3x - y\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

c. Représenter l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 \leq 1 \text{ et } x^2 + y^2 < 2\}$. Est-il ouvert ? fermé ?

d. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.

e. Montrer que l'ensemble $\Delta_n \subset M_n(\mathbb{R})$ des matrices diagonalisables n'est ni ouvert ni fermé.

f. Montrer que $\{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \forall\, V \in \mathbb{R}^n\ V \cdot MV \geq 0\}$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.

**Exercice 2.**

a. Soit $E$ un espace topologique. Pour $B \subset E$ on note $\alpha(B)$ l'adhérence de l'intérieur de $B$. Montrer que si $B$ est ouvert on a $B \subset \alpha(B)$, et donner un exemple où l'inclusion est stricte. Montrer que si $B$ est fermé on a $\alpha(B) \subset B$, et donner un exemple où l'inclusion est stricte.

b. Dans cette question $E$ est un espace vectoriel normé. On fixe $a \in E$, $r > 0$ et on note $B_o = B(a,r)$ (resp. $B_f(a,r)$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre $a$ et rayon $r$. Montrer que $\overline{B_o} = B_f$ et $^\circ B_f = B_o$. En particulier $\alpha(B_f) = B_f$.

c. On se place dans $E = \left]-\infty, 0\right] \cup [1,2] \cup \left]3, +\infty\right[$, muni de la distance induite par la distance usuelle de $\mathbb{R}$. On note $B_o = B(1,1)$ (resp. $B_f = \bar{B}(1,1)$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre 1 et rayon 1. Expliciter les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$ :

$$B_o, \ \ B_f, \ \ ^\circ B_o, \ \ \overline{B_f}, \ \ \overline{B_o}, \ \ ^\circ B_f.$$

**Exercice 3.** Soient $E$ un EVN, $A$ et $B$ deux parties non vides de $E$. On définit $A+B$ par

$$A + B = \{x + y \mid (x,y) \in A \times B\}.$$

a. On suppose que $A$ est un ouvert de $E$. Montrer que $A+B$ est ouvert.

b. On suppose que $A$ est un fermé de $E$ et que $B$ est fini. Montrer que $A+B$ est fermé.

c. Si $B$ est fini, il est en particulier fermé. Le résultat de la question précédente est-il toujours vrai si on suppose seulement que $A$ et $B$ sont fermés ?

**Exercice 4.** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-EVN. Soit $U \subset E$ un ouvert de la topologie faible contenant un point $x$.

a. Écrire la définition des ouverts faibles.
En déduire qu'il existe un ouvert $V$ de la topologie normique telle que $x \in V \subset U$.
*Cela montre que $U$ est égal à son intérieur, donc ouvert, pour la topologie normique.*

b. Montrer qu'il existe des formes linéaires $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ telles que $x + \bigcap_k \operatorname{Ker} \varphi_k \subset U$.

c. On suppose que $E$ est de dimension infinie. Montrer que $U$ est non borné.
*Cela montre que les topologies faibles et normiques sont différentes.*

d. On suppose toujours que $E$ est de dimension infinie. Montrer que tout point de la boule unité $B$ est adhérent (pour la topologie faible) à la sphère unité $S$.
*À l'aide du théorème de Hahn-Banach on peut en fait montrer que $\bar{S} = B$ pour la topologie faible.*

On rappelle le lemme d'algèbre linéaire suivant : pour $\varphi_k, \psi \in L(E, \mathbb{R})$ on a $\psi \in \operatorname{Vect}\{\varphi_k\}$ **ssi** $\bigcap_k \operatorname{Ker} \varphi_k \subset \operatorname{Ker} \psi$.

**Exercice 5.** On considère l'espace $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. On dit que $f \in E$ est positive, et on note $f \geq 0$, si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$. On dit qu'une forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$ est positive si $f \geq 0 \Rightarrow \varphi(f) \geq 0$.

a. Montrer qu'une forme linéaire positive est continue. *On pourra considérer $g : x \mapsto \|f\| - f(x)$.*

b. Appliquer ce qui précède à $\varphi_1 : f \mapsto f(1)$ et $\varphi_2 : f \mapsto \int_0^1 f$.
Montrer directement que ces formes linéaires sont continues.

**Exercice 6.** Pour $a \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{Z}^*$ on note $P_{a,r} = \{a + kr \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (progression arithmétique) et $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ l'ensemble des réunions d'ensembles $P_{a,r}$ (en incluant l'ensemble vide).

a. Montrer l'intersection de deux progressions arithmétiques $P_{a,r}$, $P_{b,s}$ est soit vide, soit une progression arithmétiques que l'on précisera.

b. Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie séparée sur $\mathbb{Z}$ dont tous les ouverts non vides sont infinis. Montrer que les ensembles $P_{a,r}$ sont à la fois ouverts et fermés. Montrer que $n!$ converge vers 0 pour cette topologie.

c. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Montrer que

$$\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \in \mathcal{P}} P_{0,p}.$$

En déduire que $\mathcal{P}$ est infini.

**Exercice 7.** On considère l'espace vectoriel $E = C([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur $[0,1]$.
Pour $f \in E$ on pose $\|f\| = \sup_{t\in[0,1]} |tf(t)|$.
On définit par ailleurs des formes linéaires $\varphi$, $\psi : E \to \mathbb{R}$ en posant $\varphi(f) = \int_0^1 t^2 f(t)\mathrm{d}t$ et $\psi(f) = f(0)$.

a. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $E$.

b. Montrer que la forme linéaire $\varphi$ est continue. Déterminer $\|\varphi\|$.

c. La forme linéaire $\psi$ est-elle continue ? *On pourra considérer les fonctions* $f_n : t \mapsto (t + \frac{1}{n})^{-1}$.

d. Les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

**Exercice 8.** Soit $E$ un espace vectoriel normé non nul et $u$, $v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $u \circ v - v \circ u = \lambda \mathrm{Id}$.

a. Montrer que $u \circ v^{n+1} - v^{n+1} \circ u = \lambda(n+1)v^n$ pour tout $n$.

b. (i) On suppose que $v^n \neq 0$. Montrer que $(n+1)|\lambda| \leq 2\|u\|\|v\|$.

(ii) On suppose que $\lambda \neq 0$. Montrer qu'il existe $n$ tel que $v^n = 0$. En déduire que $v = 0$.

(iii) Montrer qu'on a nécessairement $\lambda = 0$.

c. On prend $E = C^\infty([0,1])$, muni de la norme de la convergence uniforme $N = \|\cdot\|_\infty$.
On pose $u(f) = f'$ et $v(f) = (t \mapsto tf(t))$. Calculer $u \circ v - v \circ u$. Conclusion ?

**Exercice 9.** On considère l'espace $H = L^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$. On note $\mathcal{L}(H)$ l'espace des applications linéaires continues de $H$ dans $H$, muni de la norme d'opérateur.
Pour toute fonction mesurable $K : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, on souhaite construire l'*opérateur à noyau* $T : H \to H$ associé à $K$, donné par la formule

$$T(f)(s) = \int_0^\infty K(s,t)f(t)\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Il faut pour cela que l'intégrale converge pour presque tout $s$, et que $T(f)$ appartienne à $L^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. Dans la suite de l'exercice on pourra admettre que, sous les hypothèses faites, l'intégrale (1) converge pour presque tout $s$.

a. On suppose tout d'abord que $K$ appartient à $L^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.
Montrer que l'équation (1) définit un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\|T\| \leq \|K\|_2$.

b. On suppose maintenant que $K$ est à valeurs positives et qu'il existe $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ et $p$, $q : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ mesurables telles qu'on ait presque partout :

$$\int_0^\infty p(s)K(s,t)\mathrm{d}s \leq \beta q(t) \quad \text{et} \quad \int_0^\infty K(s,t)q(t)\mathrm{d}t \leq \alpha p(s).$$

(i) Montrer qu'on a pour toute fonction $f \in H$ et pour presque tout $s \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$\Big(\int_0^\infty K(s,t)f(t)\mathrm{d}t\Big)^2 \leq \alpha\, p(s) \int_0^\infty K(s,t)f(t)^2 q(t)^{-1}\mathrm{d}t$$

*On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz.*

(ii) En déduire que l'équation (1) définit un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\|T\| \leq \sqrt{\alpha\beta}$.

c. On considère maintenant l'exemple donné par $K(s,t) = (1+s+t)^{-1}$.

(i) Calculer la dérivée de $\varphi : x \mapsto \arctan(\sqrt{x}/\sqrt{a})$. En déduire que

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+s+t)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sqrt{s+1}}.$$

(ii) Montrer que pour ce noyau $K$ l'équation (1) définit un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\|T\| \leq \pi$.

(iii) Pour cet exemple, a-t-on $K \in L^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ ?