Courbes paramétrées

Exercice 1. *La cycloïde.* Un cercle $\mathcal{C}$ de rayon 1 roule sans glisser sur l'axe Ox. On note M un point fixé de $\mathcal{C}$ et on se propose d'étudier la trajectoire de M. On note Ω le centre (mobile) de $\mathcal{C}$ et I le point de contact (mobile) de $\mathcal{C}$ avec l'axe Ox. Soit t l'abscisse de I. On suppose que $M = I$ quand $t = 0$.

a. Déterminer en fonction de t les coordonnées $x(t)$, $y(t)$ de M.
On pourra remarquer que t est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega I})$.
b. Proposer un domaine d'étude pour la courbe paramétrée (x, y) et étudier ses variations.
c. Déterminer les points singuliers de la courbe et les tangentes en ces points.
d. Calculer la longueur de la courbe entre les points $t = 0$ et $t = 2\pi$.

La cycloïde est étudiée depuis le XVIe siècle. En 1658 Pascal pose 9 « défis » à ses contemporains à propos de la cycloïde, rapidement résolus. La longueur de la cycloïde a été calculée par Christopher Wren également en 1658 (donc avant l'« invention » du calcul infinitésimal (et intégral) par Newton et Leibniz dans les années 1680).

Exercice 2. *La strophoïde.* On définit la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x &= \dfrac{t^2-1}{t^2+1} \\ y &= t\dfrac{t^2-1}{t^2+1} \end{cases}$$

Faire l'étude de cette courbe : domaine d'étude et symétries, variations. Déterminer les tangentes au point multiple $(0, 0)$ et étudier l'existence d'asymptote quand $t \to \pm\infty$. Tracer l'allure de la courbe.

Exercice 3. *(Contrôle intermédiaire, 2017)* On considère la courbe paramétrée $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ donnée par

$$x(t) = t + \frac{4}{t}, \qquad y(t) = t - \frac{9t}{t^2+2}.$$

a. Déterminer le domaine de définition de γ. Peut-on restreindre son domaine d'étude ?
b. Dresser les tableaux de variations de x et y. On précisera les limites aux bornes.
c. Y a-t-il des points singuliers ? Si oui lesquels ?
d. Donner des vecteurs directeurs des tangentes à la courbe aux points de paramètre $t = 1$ et $t = \sqrt{2}$.
e. Calculer $\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)}$.
f. Montrer que la courbe admet une asymptote, dont on donnera l'équation, quand $t \to +\infty$.
g. Tracer l'allure de la courbe. On fera apparaître les asymptotes (horizontales, verticales ou obliques), ainsi que les éventuelles tangentes verticales et horizontales à la courbe.

Exercice 4. Étudier (domaine d'étude, variations, branches infinies avec asymptotes éventuelles, points singuliers) et construire les courbes paramétrées suivantes :

- $a : \begin{cases} x &= \sin(2t) \\ y &= \sin(3t) \end{cases}$ (courbe de Lissajous),
- $b : \begin{cases} x &= e^t \\ y &= t^2 \end{cases}$,
- $c : \begin{cases} x &= \frac{t}{1+t^4} \\ y &= \frac{t^3}{1+t^4} \end{cases}$ (lemniscate de Bernoulli),
- $d : \begin{cases} x &= \sin 2t + 2\sin t \\ y &= -2\cos t - \cos 2t \end{cases}$ (cardioïde),
- $e : \begin{cases} x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y &= \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$ (quelle est cette courbe ?),
- $f : \begin{cases} x &= t\sqrt{1-t^2} \\ y &= t(1-t^2) \end{cases}$,
- $g : \begin{cases} x &= 2-t^2 \\ y &= t\sqrt{t^4-4t^2+3} \end{cases}$ (courbe elliptique),
- $h : \begin{cases} x &= \cos^3 t \\ y &= \sin^3 t \end{cases}$ (astroïde),
- $i : \begin{cases} x &= \sqrt{t+\frac{1}{t-1}} \\ y &= \sqrt{t-\frac{1}{t+1}} \end{cases}$,
- $j : \begin{cases} x &= 2t^2-t \\ y &= t^2+\ln(t)+1 \end{cases}$.