Université de Caen
UFR Sciences
M1 Maths

2e semestre 2018-2019
Mathématiques
Analyse fonctionnelle

Convexité et Dualité

Exercice 1. Soit E un EVN, $F \subset E$ un sous-espace vectoriel, et G un EVN de dimension finie.

a. Montrer que toute application linéaire continue $S \in \mathcal{L}(F, G)$ peut se prolonger en un application linéaire continue $T \in \mathcal{L}(E, G)$.

b. On suppose F de dimension finie.
   (i) Montrer que F est fermé.
   (ii) Montrer qu'il existe $T \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $T(x) = x$ pour tout $x \in F$.
   (iii) Monter que F admet un supplémentaire fermé.

Exercice 2. Soit E un EVN et $C \subset E$ une partie convexe fermée. On considère

$$A = \{(\varphi, m) \in E^* \times \mathbb{R} \mid m \leq \inf \varphi(C)\}.$$

Montrer que $C = \bigcap_{(\varphi,m)\in A} \{x \in E \mid \varphi(x) \geq m\}$.
Ainsi tout convexe fermé est une intersection de demi-espaces fermés.

Exercice 3. On considère $E = L^2([0,1], \mathbb{R})$ et les sous-ensembles

$$C_\alpha = \{f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \mid f(0) = \alpha\}.$$

a. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, C_α est convexe.

b. On fixe $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que toute fonction $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ est limite dans E de fonctions $g \in C_\alpha$.
   On pourra approcher f par une fonction $g \in C_\alpha$ égale à f sur un intervalle du type $[\epsilon, 1]$.

c. Montrer que C_α est dense dans E.

d. Montrer que, pour $\alpha \neq \beta$, il n'existe pas d'hyperplan fermé qui sépare C_α de la fonction constante β.

Exercice 4. *(Examen 2017)*
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. On munit $E \times E$ de la norme $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$.
Soit $K \subset E$ un compact convexe non vide.
Soit $f : K \to K$ une application continue. On suppose de plus que f est *affine*, c'est-à-dire que pour tous x, $x' \in K$ et $\lambda \in [0,1]$ on a $\lambda f(x) + (1-\lambda) f(x') = f(\lambda x + (1-\lambda)x')$.
On note $G(f) \subset K \times K$ le graphe de f, et on considère également $D = \{(x, x) \mid x \in K\} \subset K \times K$.
Le but de l'exercice est de montrer que f admet un point fixe, et on procède par l'absurde. On suppose donc que f n'admet pas de point fixe.

a. Montrer que $G(f)$ et D sont des convexes compacts de $E \times E$.
   On notera que E n'est pas nécessairement de dimension finie.

b. Montrer qu'il existe une forme linéaire continue $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ et α, $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi(x, x) \leq \alpha < \beta \leq \varphi(x', f(x'))$ pour tous x, $x' \in K$.

c. Montrer qu'il existe deux formes linéaires continues φ_1, $\varphi_2 : E \to \mathbb{R}$ telles que $\varphi(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2)$ pour tous x_1, $x_2 \in E$.

d. Montrer que pour tout $x \in K$ on a $\varphi_2(f(x)) - \varphi_2(x) \geq \beta - \alpha$.
   Montrer que pour tout $x \in K$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\varphi_2(f^n(x)) - \varphi_2(x) \geq n(\beta - \alpha)$.

e. Conclure.

Exercice 5. *(Examen 2018)* Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. On note E^* l'espace des formes linéaires *continues* sur E, muni de la norme d'opérateur. Soit φ, $\psi \in E^*$.

On rappelle le résultat d'algèbre suivant : si φ est nulle sur $\operatorname{Ker} \psi$, alors φ est proportionnelle à ψ. Autrement dit, si $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in \operatorname{Ker} \psi$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi = \alpha\psi$.

On fait maintenant l'hypothèse moins forte suivante : on suppose qu'il existe $\varepsilon \geq 0$ tel que $|\varphi(x)| \leq \varepsilon\|x\|$ pour tout $x \in \operatorname{Ker} \psi$.

a. Montrer qu'il existe $\varphi' \in E^*$ telle que $\|\varphi'\| \leq \varepsilon$ et $\varphi'(x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in \operatorname{Ker} \psi$.

b. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi = \varphi' + \alpha\psi$.
   En déduire que $\|\varphi - \alpha\psi\| \leq \varepsilon$.

c. On suppose de plus que $\|\varphi\| = \|\psi\| = 1$. Montrer que $|1 - |\alpha|| \leq \varepsilon$.
   Dans le cas $\alpha \geq 0$, en déduire que $\|\varphi - \psi\| \leq 2\varepsilon$.

Exercice 6. Soit $E = \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ avec $p \in [1, +\infty]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère l'élément $e_n = (\delta_{nk})_k \in E$.

a. On considère le cas $p = 2$.
   (i) On fixe $\varphi \in E'$ et $n \in \mathbb{N}$. En considérant l'élément $x = \sum_{k=0}^{n} \varphi(e_k) e_k$, montrer que $\sum_{k=0}^{n} \varphi(e_k)^2 \leq \|\varphi\|^2$.
   (ii) Montrer que $(e_n)_n$ converge faiblement vers 0 dans E. A-t-on convergence en norme ?

b. Montrer que le résultat de la question précédente reste valable pour $p = +\infty$.
   On considèrera $x = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sgn} \varphi(e_k) e_k$.

c. Montrer que le résultat de la question précédente reste valable pour tout $p \in]1, +\infty[$.
   On considèrera $x = \sum_{k=0}^{n} [\varphi(e_k)]^{q-1} e_k$, *où* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *et* $[x]^q = \operatorname{sgn}(x)|x|^q$.

d. On considère le cas $p = 1$.
   Trouver une forme linéaire continue $\varphi \in E'$ telle que $\varphi(e_n)$ ne tend pas vers 0.

Exercice 7. Soit E un EVN de dimension infinie.
On note $B = \{x \in E \mid \|x\| < 1\}$, $\bar{B} = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$, $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$.

a. Soit $U \subset E$ un ouvert faible contenant 0. Montrer que U contient une droite.

b. Montrer que B est d'intérieur vide pour la topologie faible.

c. Montrer que 0 est adhérent à S pour la topologie faible.

d. Montrer que $\bar{B}$ est fermé pour la topologie faible.

e. Quelle est l'adhérence de S pour la toplogie faible ?