Fonctions de plusieurs variables et Topologie de $\mathbb{R}^n$

Exercice 1. Déterminer et représenter graphiquement les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\,; \qquad g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\,; \qquad h(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}\,;$$

$$i(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}\,; \qquad j(x,y) = 2+\sqrt{-(x-y)^2}\,; \qquad k(x,y) = \ln(x^2-y).$$

Exercice 2. On rappelle qu'une fonction polynomiale $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue, et que la composée, la somme et le produit de deux fonctions continues sont continus. Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}^2$:

a. $f(x,y) = xy + 2x^2y^2 - y^3$
b. $f(x,y) = \sin(x) + x^2$
c. $f(x,y) = \cos(xy^2) + \exp(2xy^2)$
d. $f(x,y) = \ln(2+x^2+y^2) + \exp(xy)$
e. $f(x,y) = \cos(x)\sin(y^2)$

Exercice 3. On considère les fonctions f, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par $f(0,0) = g(0,0) = 0$ et les formules suivantes, pour $(x,y) \neq (0,0)$:

$$f(x,y) = \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad g(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}.$$

Montrer que f et g sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, puis en $(0,0)$.
On pourra démontrer et utiliser l'inégalité $2xy \leq x^2+y^2$.

Exercice 4. On définit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en posant

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\ln(1+x^2+y^2)} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Soit α un paramètre réel fixé et $\mathcal{D}_\alpha$ la droite d'équation $y = \alpha x$ dans $\mathbb{R}^2$.
On paramètre $\mathcal{D}_\alpha$ sous la forme $\mathcal{D}_\alpha = \{(t, \alpha t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

b. Déterminer $\lim_{t\to 0} f(t, \alpha t)$.
c. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$? Peut-on modifier sa valeur en $(0,0)$ pour la rendre continue ?

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, puis sur toute droite passant par $(0,0)$.
L'application f est-elle continue en $(0,0)$? On pourra utiliser un paramétrage de la parabole d'équation $y = x^2$.

Exercice 6. Les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants sont-ils ouverts, fermés ou ni l'un ni l'autre ? On pourra notamment les exprimer comme intervalles ou réunions d'intervalles.

$A =]-2, \pi] \cup [3, 5[$ $\qquad$ $B = {}^c(\{0\} \cup [4, 5])$

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| < 2 \text{ ou } x > 3\}$ $\qquad$ $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x-4| \geq 6\} \cap \mathbb{R}_-$

$E = \{n^{-1} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ $\qquad$ $F = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

$G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[e^{-n}, \frac{2n}{n+1}\right]$ $\qquad$ $H = \bigcap_{n\geq 2} \left]3 - \frac{2}{n^2}, 3 + \frac{2n}{n-1}\right[$

Exercice 7. On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } y > 0\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}.$$

a. Soit $P_0 = (x_0, y_0) \in A$.
Trouver un réel $r > 0$ tel que la boule ouverte de centre P_0 et rayon r soit incluse dans A.

b. Soit $P_n = (x_n, y_n)$ une suite de points de B qui convergent vers un point $P = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$.
Montrer que P appartient à B.

c. A et B sont-ils ouvert, fermé, ou ni l'un ni l'autre ?
Le redémontrer à l'aide d'images réciproques.

Exercice 8. Dire si les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont ouverts, fermés, ou ni l'un ni l'autre, en justifiant :

a. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\}$

b. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 = 1\}$

c. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 \leq 1 \text{ et } x^2 + y^2 < 2\}$

d. $([2, 3] \cup \{0\}) \times [-1, 1]$

e. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ et } y = \frac{1}{x^2}\}$

f. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - xy > 0\}$

g. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin(x^2 + y^2) \geq 0\}$

h. $\mathbb{Z} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$

i. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1,\ y \leq 2 \text{ et } x - y \geq 0\}$

j. $\{(\cos t, \sin t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

k. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(1, 0)\}$

l. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 - (x^2 + y^2) = 0\}$

Montrer que le dernier ensemble est encore fermé lorsqu'on lui enlève le point $(0, 0)$.

Exercice 9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère le sous-ensemble $H_n \subset \mathbb{R}^2$ défini comme suit :

$$H_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > nx\}.$$

a. On fixe n. Montrer que H_n est ouvert.

b. On considère $Q = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n$.

(i) Montrer que $Q = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+^*$.

(ii) Montrer que Q n'est ni ouvert ni fermé.

Exercice 10. Si A, B sont deux parties de $\mathbb{R}^n$, on note $A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$.

a. Montrer que pour tous x, $y \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$ on a $\{x\} + B(y, r) = B(x + y, r)$.

b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout ouvert $O \subset \mathbb{R}^n$, $\{x\} + O$ est encore un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

c. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout ouvert $F \subset \mathbb{R}^n$, $\{x\} + F$ est encore un fermé de $\mathbb{R}^n$.

d. Montrer que pour toute partie $A \subset \mathbb{R}^n$ et tout ouvert $O \subset \mathbb{R}^n$, $A + O$ est encore un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

e. Montrer que pour toute partie *finie* $A \subset \mathbb{R}^n$ et tout fermé $F \subset \mathbb{R}^n$, $A + F$ est encore un fermé de $\mathbb{R}^n$.

f. Trouver deux fermés A, $B \in \mathbb{R}$ tels que $A + B$ n'est pas fermé.

Exercice 11. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

a. Montrer que si F est ouvert, alors $F = \mathbb{R}^n$.

b. Montrer que F est fermé.