# Espaces de Banach

**Exercice 1.** Soit $X$ un espace métrique complet et $(f_n)_n$ une suite de fonctions *continues* de $X$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction $f : X \to \mathbb{R}$. On sait qu'en général $f$ n'est pas continue. On va montrer cependant que les points $x \in X$ où $f$ est continue forment une partie dense de $X$. Pour ce faire on considère les sous-ensembles $F_{\epsilon,n} \subset X$ definis, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$F_{\epsilon,n} = \{x \in X \mid \forall p \geq n \;\; |f_p(x) - f_n(x)| \leq \epsilon\}.$$

a. Montrer que les parties $F_{\epsilon,n}$ sont fermées dans $X$.

b. On fixe $\epsilon > 0$.
   (i) Montrer que la réunion des $F_{\epsilon,n}$, lorsque $n$ parcourt $\mathbb{N}$, est égale à $X$.
   (ii) Montrer que $U_\epsilon = \bigcup_n F^\circ_{\epsilon,n}$ est un ouvert dense de $X$.

c. On considère $C = \bigcap_{\epsilon>0} U_\epsilon$.
   (i) Écrire l'assertion « $x \in C$ » avec des quantificateurs, sans utiliser les sous-ensembles $F_{\epsilon,n}$. Qu'obtient-on en faisant tendre $p$ vers $+\infty$ dans cette assertion ?
   (ii) Écrire la définition de la continuité de $f_n$ en $x$. Montrer que $f$ est continue en $x$.

d. Conclure.

e. Application. Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que les points où $f'$ est continue forment une partie dense de $I$.

**Exercice 2.** Soit $E$ un espace de Banach.

a. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de $E$ distinct de $E$. Montrer que $F$ ne contient aucune des boules $B(0, r)$, pour $r > 0$. Montrer que $F$ est d'intérieur vide.

b. On suppose que $E$ est réunion de sous-espaces fermés $F_n$. Montrer qu'il existe $n$ tel que $E = F_n$.

c. Montrer qu'un espace de Banach de dimension infinie n'admet pas de base (algébrique) dénombrable.

**Exercice 3.** Soit $E$ un espace de Banach, décomposé sous la forme $E = F \oplus G$. On note $p$ la projection sur $F$ parallèlement à $G$.

a. Exprimer $F$ et $G$ à l'aide de $p$. En déduire que si $p$ est continue, $F$ et $G$ sont fermés.

b. À l'aide du théorème du graphe fermé, montrer que si $F$ et $G$ sont fermés alors $p$ est continue.

**Exercice 4.** *(Examen 2018)* Soit $E$, $F$ des espaces de Banach et $S \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire continue.

a. On suppose qu'il existe $T \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $T \circ S = \mathrm{Id}$.
   (i) Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $\|S(x)\| \geq M\|x\|$.
   (ii) Montrer que $S$ est injective et que $\operatorname{Im} S$ est fermée.
   (iii) Montrer que $\operatorname{Ker} T$ est un supplémentaire fermé de $\operatorname{Im} S$.

b. On suppose maintenant que $S$ est injective, que $\operatorname{Im} S$ est fermée, et que $\operatorname{Im} S$ admet un supplémentaire fermé $F_0 \subset F$. On considère $G = \{(S(x) + z, x) \mid x \in E,\; z \in F_0\} \subset F \times E$, et l'espace $F \times E$ est muni de la norme $\|(y, x)\| = \|y\|_F + \|x\|_E$.
   (i) Montrer que $G$ est le graphe d'une application $T : F \to E$.
   On admet que, comme $G$ est un sous-espace, $T$ est linéaire.
   (ii) Montrer que : $(y, x) \in G \Leftrightarrow y - S(x) \in F_0$.
   (iii) Montrer que $T$ est continue.
   (iv) Montrer que $T \circ S = \mathrm{Id}$.

c. On considère le cas $E = F = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, et on suppose que $S \in \mathcal{L}(E)$ est une *isométrie*, c'est-à-dire qu'on a $\|S(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$. Montrer qu'il existe $T \in \mathcal{L}(E)$ tel que $T \circ S = \mathrm{Id}$.

**Exercice 5.** *(Examen 2016)* Soit $E$ un espace de Banach *de dimension infinie* et $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur borné *bijectif.*

a. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\|T(x)\| \geq 2\epsilon\|x\|$ pour tout $x \in E$.

b. Soit $S \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur borné tel que $\|T - S\| \leq \epsilon$.
Montrer qu'on a $\|S(x)\| \geq \epsilon\|x\|$ pour tout $x \in E$. En particulier, $S$ est injectif.

c. L'application $T$ est-elle limite d'applications linéaires de rang fini dans $\mathcal{L}(E)$ ?

**Exercice 6.** On cherche à estimer la norme dans $L^1([0, 2\pi])$ du noyau de Dirichlet

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)}.$$

Pour cela on découpe l'intégrale aux points où $D_n$ change de signe :

$$\|D_n\|_1 = 2\int_0^\pi |D_n(t)|\mathrm{d}t = 2\sum_{k=0}^{n-1} I_{n,k} + 2\int_{\frac{2n\pi}{2n+1}}^{\pi} |D_n(t)|\mathrm{d}t, \quad \text{avec} \quad I_{n,k} = \int_{\frac{2k\pi}{2n+1}}^{\frac{2(k+1)\pi}{2n+1}} |D_n(t)|\mathrm{d}t.$$

a. En utilisant l'inégalité $\sin x \leq x$ valable sur $\mathbb{R}_+$, montrer que $I_{n,k} \geq 4/((k+1)\pi)$.

b. En déduire que $\|D_n\|_1$ tend vers $+\infty$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 7.** Pour $f \in L^1([0, 2\pi])$ on note $c_k(f) = \int_0^{2\pi} e^{-ikt} f(t)\mathrm{d}t$ le $k^{\text{e}}$ coefficient de Fourier de $f$ et on considère la transformée de Fourier $T : L^1([0, 2\pi]) \to \ell^\infty(\mathbb{Z})$, $f \mapsto (c_n(f))_n$. On rappelle que $T$ est injective et que son image est contenue dans $c_0(\mathbb{Z})$ (*lemme de Riemann-Lebesgue*). On va montrer qu'il existe des suites $(c_n)_n \in c_0(\mathbb{Z})$ qui ne sont les suites de coefficients de Fourrier d'aucune fonction $f \in L^1([0, 2\pi])$.

a. Montrer que $T$ est un opérateur borné relativement à la norme de $L^1([0, 2\pi])$ et à la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $c_0(\mathbb{Z})$.

b. Étudier le comportement de $\|T(D_n)\|_\infty / \|D_n\|_1$ lorsque $n \to \infty$, où $D_n$ est le noyau de Dirichlet étudié à l'exercice 6.

c. À l'aide du théorème des isomorphismes de Banach, montrer que $\operatorname{Im} T \neq c_0(\mathbb{Z})$.

**Exercice 8.** Soit $E$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues et $2\pi$-périodiques, muni de la norme de la convergence uniforme. On note $c_k(f) = \int_0^{2\pi} e^{-ikt} f(t)\mathrm{d}t$ le $k^{\text{e}}$ coefficient de Fourier de $f \in E$ et $S_n(f) : t \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikt} \in E$ les sommes partielles symétriques de la série de Fourier associée à $f$. On fixe $t \in [0, 2\pi]$ et on considère la forme linéaire $L_n : f \mapsto S_n(f)(t)$.

a. Montrer que $L_n(f) = \int_0^{2\pi} f(s)D_n(t - s)\mathrm{d}s$, où $D_n$ est le noyau de Dirichlet introduit à l'exercice 6.

b. Montrer que $\|L_n\| = \|D_n\|_1$. *On pourra utiliser la densité de $C([0, 1])$ dans $L^1([0, 1])$.*

c. À l'aide du théorème de Banach-Steinhaus, montrer qu'il existe une fonction $f \in E$ telle que la série de Fourier de $f$ ne converge pas au point $t$.

**Exercice 9.** Soit $E$ un EVN et $X \subset E$ une partie de $E$ telle que, pour toute forme linéaire continue $\varphi \in E'$, l'ensemble $\varphi(X) \subset \mathbb{R}$ est borné.

a. À l'aide du principe de la borne uniforme, montrer l'existence d'une constante $M > 0$ telle que $|\varphi(x)| \leq M\|\varphi\|$ pour tout $x \in X$ et toute $\varphi \in E'$.

b. En déduire que $X$ est borné (en norme) dans $E$.

c. Soit $K \subset E$ une partie compacte pour la topologie faible. Montrer que $K$ est bornée.

d. Le résultat précédent reste-t-il valable pour un compact préfaible dans le dual d'un EVN ?

**Exercice 10.** *(Écrit agreg 2013, partie IV, extrait)*
Pour tout segment $S = [a, b] \subset [0, 1]$ on considère l'espace de fonctions continues $E_S = C(S, \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme sur $S$ notée $\|f\|_S = \sup_{t \in S} |f(t)|$.
On considère un sous-espace *fermé* $F \subset E_S$ tel que toutes les fonctions $f \in F$ sont de classe $C^1$ sur $S$.
Pour $x \neq y$ dans $S$ et $f \in E_S$ on pose $\varphi_{x,y}(f) = (f(x) - f(y))/(x - y)$.

a. Montrer que $\varphi_{x,y}$ est une forme linéaire continue sur $E_S$.

b. Montrer que pour $f \in F$ fixée l'ensemble $\{\varphi_{x,y}(f) \mid x, y \in S, x \neq y\}$ est borné dans $\mathbb{R}$.

c. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute $f \in F$ et tous $x \neq y$ dans $S$ on ait

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|\, \|f\|_S.$$

d. On fixe des points $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_l = b$ tels que $|t_{k+1} - t_k| \leq C^{-1}$ pour tout $k$.
Montrer que pour toute $f \in F$ on a $\sup_{t \in S} |f(t)| \leq \max_k |f(t_k)| + \frac{1}{2}\|f\|_S$.

e. Montrer que $F$ est de dimension finie.