Université de Caen
UFR Sciences
L2 Maths

1^er semestre 2018-2019
Mathématiques
Analyse

# Dérivées partielles et recherche d'extrémums

**Exercice 1.** Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :
- $f : (x,y) \mapsto x^2y + 2x - 3y + 12$,
- $f : (x,y) \mapsto 2xy^3 + 3xy - y$,
- $f : (x,y) \mapsto xy\cos(y) + \sin(xy)$,
- $f : (x,y) \mapsto (x+2y)(2x+y) + \sin(x)$,
- $f : (x,y) \mapsto e^{xy} + (x-y)^2$,
- $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x+2y}{x^2+y^2+1}$,
- $f : (x,y,z) \mapsto x^2z + xyz + yz^2$.

**Exercice 2.** On définit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en posant $f(0,0) = 1$ et, pour $(x,y) \neq (0,0)$ :

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2}.$$

a. Vérifier que $f$ est bien définie et de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

b. En étudiant la restriction de $f$ aux droites d'équation $y = ax$, montrer que $f$ n'est pas continue en $(0,0)$.

c. Montrer que $f$ admet des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à $x$ et $y$ en $(0,0)$.

**Exercice 3.** On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie comme suit :

$$f(x,y) = \sqrt{|xy|} + (x+1)^2 + y.$$

a. Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle admet des dérivées partielles par rapport à $x$ et $y$ en tout point $(x,y)$ tel que $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

b. Montrer que $f$ admet en $(0,0)$ des dérivées partielles par rapport à $x$ et $y$ qu'on calculera.

c. Étudier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(a,0)$ pour $a \neq 0$.

**Exercice 4.** *(Contrôle terminal, 2017)*
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y + x^3}{x^2+|y|} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Justifier la continuité de $f$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

b. (i) Justifier les inégalités suivantes, pour $(x,y) \in [-1,1]^2$ :

$$x^2 + |y| \geq \|(x,y)\|_2^2, \qquad |x| \leq \|(x,y)\|_2, \qquad |y| \leq \|(x,y)\|_2.$$

(ii) Montrer que $f$ est continue en $(0,0)$.

c. Montrer que $f$ admet des dérivées partielles par rapport à $x$ et $y$ en $(0,0)$ et les calculer.

d. (i) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ lorsque $y > 0$.

(ii) La fonction $f$ est-elle de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ ?

**Exercice 5.** On introduit un sous-ensemble $F \subset \mathbb{R}^2$ et une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en posant

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\} \quad \text{et} \quad f(x, y) = xy(1 - x - y).$$

a. (i) Représenter $F$, montrer qu'il est compact.
   (ii) En déduire que $f$ est bornée et atteint ses bornes sur $F$.
   (iii) Montrer que $f(x, y) \geq 0$ pour tout $(x, y) \in F$.
   Représenter sur un dessin les points $(x, y) \in F$ pour lesquels $f(x, y) = 0$.
   (iv) Quelle est le minimum de $f$ sur $F$ ? En quel(s) point(s) est-il atteint ?

b. (i) Calculer les dérivées partielles de $f$ par rapport à $x$ et $y$.
   (ii) Déterminer les 4 points critiques de $f$.

c. Quel est le maximum de $f$ sur $F$ ? En quel(s) point(s) de $F$ est-il atteint ? Justifier.

**Exercice 6.** On note $\bar{B}$ (resp. $B$) la boule unité fermée (resp. ouverte) de $\mathbb{R}^2$ et on considère la fonction $f : \bar{B} \to \mathbb{R}$ définie par la formule $f(x, y) = x^2 + y^4$.

a. Montrer que $f$ admet un minimum global et un maximum global sur $\bar{B}$.
b. Déterminer les points critiques de $f$ sur $B$.
c. Montrer que le minimum global de $f$ sur $\bar{B}$ est atteint en $(0, 0)$ uniquement.
d. À l'aide des questions 1 et 2, montrer que le maximum global de $f$ sur $\bar{B}$ est atteint sur $\bar{B} \setminus B$.
e. On pose $g(\theta) = f(\cos(\theta), \sin(\theta))$.
   Rechercher les anulations de $g'$ et calculer les valeurs correspondantes de $g$.
   Quels sont les extrémums de $g$ ?
f. À l'aide des questions d et e, déterminer le maximum de $f$ sur $\bar{B}$ et les points où il est atteint.

**Exercice 7.** *(Contrôle terminal, 2017)*
On considère les sous-ensembles suivant de $\mathbb{R}^2$ :

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1 - x^2\}, \qquad O = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < 1 - x^2\},$$
$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1 - x^2 \text{ et } y \geq 0\}, \qquad I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \text{ et } -1 \leq x \leq 1\}.$$

On considère par ailleurs la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto (3x^2 + 2x)y - 2x$.

a. Représenter $O$, $P$, et $I$ sur un dessin. Exprimer $F$ à l'aide de $O$, $P$ et $I$.

b. (i) Montrer que $F$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
   (ii) Montrer que $O \cup I$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}^2$.

c. (i) Montrer que $F$ est borné.
   (ii) Montrer que $f$ admet un maximum global et un minimum global sur $F$.

d. (i) Déterminer les points critiques de $f$ sur $\mathbb{R}^2$.
   (ii) Montrer que les extrémums globaux de $f$ sur $F$ sont atteints en des points de $P \cup I$.
   *On ne cherchera pas à déterminer ces points.*

e. (i) Déterminer les extrémums de $f$ sur $I$ et préciser en quels points ils sont atteints.
   (ii) Déterminer les extrémums de $f$ sur $P$ et préciser en quels points ils sont atteints.
   *On pourra étudier la fonction $\varphi : x \mapsto f(x, 1 - x^2)$.*
   (iii) Quels sont les extrémums globaux de $f$ sur $F$ ? En quels points sont-ils atteints ?