

FICHE DE TD N° 1

Objectifs : savoir résoudre une équation du second degré et factoriser un polynôme du second degré ; savoir discuter une équation du second degré avec un paramètre ; savoir trouver deux nombres quand on connaît leur somme et leur produit ; savoir trouver les solutions d'une équation du troisième degré lorsqu'elle a une solution évidente. Tous les nombres considérés sont des réels.

Exercice 1. En utilisant les identités remarquables, factoriser les polynômes du second degré suivants :

- $P_1(x) = x^2 - 1$,
- $P_2(x) = x^2 - 8$,
- $P_3(x) = x^2 + 5x$,
- $P_4(x) = x^2 + 10x + 25$,
- $P_5(x) = x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$,
- $P_6(x) = 9x^2 + 12x + 4$.

Exercice 2. Résoudre les équations du second degré suivantes :

- a. $x^2 - x - 12 = 0$,
- b. $2x^2 - 7x + 3 = 0$,
- c. $x^2 + 6x + 9 = 0$,
- d. $3x^2 - x - 2 = 0$,
- e. $x^2 + x + 1 = 0$,
- f. $x^2 - 10x + 21 = 0$,
- g. $x^2 - 3x - 4 = 0$.

Exercice 3. Factoriser les polynômes du second degré suivants :

- $P_1(x) = x^2 + 7x + 12$,
- $P_2(x) = -x^2 + x + 1$,
- $P_3(x) = 6x^2 + 13x + 1$.

Exercice 4.

- a. Prouver que l'équation $x^2 - 6x + 2,75 = 0$ a deux solutions et calculer ces solutions.
- b. On considère plus généralement l'équation $x^2 - 6x + m = 0$. Trouver la condition sur m pour que cette équation ait deux solutions.

Exercice 5.

- a. Montrer que l'équation $2x^2 - 7x + 3 = 0$ a deux solutions et les calculer.
- b. Quelles sont les valeurs de m pour lesquelles l'équation $2x^2 - 7x + m = 0$ n'a aucune solution ?

Exercice 6. Trouver les valeurs de m pour lesquelles l'équation $x^2 - 5x + m = 0$ a exactement deux solutions et exprimer ces solutions en fonction de m .

Exercice 7. Résoudre l'équation $3x^2 - mx + 4 = 0$, en discutant suivant les valeurs du paramètre m .

Exercice 8. Résoudre l'équation $(m - 1)x^2 + 2x - 5 = 0$, en discutant suivant les valeurs du paramètre m .

Exercice 9.

- Trouver deux nombres dont la somme vaut 7 et le produit vaut 12.
- Trouver deux nombres dont la somme vaut 49 et le produit vaut 258.
- Trouver les dimensions d'une feuille de papier dont l'aire vaut 1m^2 et le périmètre 4,06m.
- Trouver deux nombres dont la différence vaut 10 et dont le produit vaut 100.

Exercice 10. Vérifier que 15 est une racine du polynôme $x^2 + x - 240$. En déduire l'autre racine sans calculer le discriminant.

Exercice 11. Sans les calculer, montrer que l'équation $12x^2 + 7284421579x + 12 = 0$ a deux solutions inverses l'une de l'autre.

Exercice 12. À l'occasion de leur mariage, deux personnes reçoivent chacune un capital de la part de sa famille. L'un des conjoints place cet argent au taux de $t\%$; l'autre au taux de $(t + 3)\%$. Au bout d'un an, ces placements ont rapporté 1125 euros au premier et 1110 euros à l'autre. Ils disposent alors ensemble de la somme totale de 30000 euros. Quels étaient les capitaux initiaux de chacun ?

Exercice 13. Les membres d'une association se partagent les frais d'une excursion en autobus qui coûte 540 euros. Cinq personnes annulent leur participation, ce qui augmente le coût pour les autres de 1,50 euro par personne. Combien de personnes ont fait le voyage ?

Exercice 14.

- Écrire, sous forme développée, une équation du second degré dont les solutions sont 3 et -13 .
- Écrire une équation du second degré dont la seule solution est $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Écrire une équation du second degré dont les solutions sont $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Trouver un polynôme du second degré à coefficients entiers dont les racines sont $-\frac{2}{3}$ et $-\frac{3}{2}$.

Exercice 15. Écrire, sous forme développée, une équation du troisième degré dont les solutions sont 1, 2 et 3.

Exercice 16. Pour chacun des polynômes du troisième degré suivants, trouver une racine « évidente » r , puis trouver α, β, γ tels qu'on ait $P(x) = (x - r)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$ et en déduire les autres racines s'il y a lieu.

- $P_1(x) = x^3 + 3x^2 - 2$,
- $P_2(x) = x^3 + 10x^2 - 39x$,
- $P_3(x) = 3x^3 - 11x^2 - 19x - 5$,
- $P_4(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$,
- $P_5(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

Exercice 17. On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 6x^2 + ax + 12$. Sachant que $P(-1) = 0$, calculer a . Déterminer les racines du polynôme $P(x)$. En déduire la factorisation de $P(x)$.

Exercice 18. Résoudre l'équation du quatrième degré $4x^4 - 9x^2 + 5 = 0$.

Exercice 19. (*Partiel 2018*)

On considère le polynôme $Q(x) = x^2 + 2x - m$, où m est un paramètre réel.

- Déterminer les racines de Q lorsque $m = 1$.
- Pour quelles valeurs du paramètre m l'équation $Q(x) = 0$ admet-elle au moins une solution ?
- En utilisant la question précédente, dire s'il est possible de trouver deux nombres dont le produit et la somme valent -2 . On justifiera la réponse.

On considère maintenant le polynôme $P(x) = x^3 - 5x + 2$.

- Vérifier que 2 est racine de P .
- En utilisant la question a., déterminer les racines de P .