Fiche de TD n° 3

Objectifs : savoir inverser une matrice carrée d'ordre trois et résoudre un système de trois équations linéaires à trois inconnues dans le cas où la matrice des coefficients est inversible ; savoir discuter l'inversibilité d'une matrice carrée d'ordre trois avec un paramètre ; savoir calculer directement la puissance n^e d'une matrice carrée d'ordre trois qui a trois valeurs propres distinctes. Tous les nombres considérés sont réels.

Exercice 1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^2.

b. En déduire la matrice inverse A^{-1} de la matrice A.

c. Trouver sans calcul A^n pour tout entier $n \geq 3$.

Exercice 2. *(Examen 2018)* On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Calculer le produit matriciel AB. *On présentera le détail du calcul.*

b. *Sans nouveau calcul*, dire quel est l'inverse de la matrice A.

c. Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ -x + y - z = 2 \\ -x + z = 1. \end{cases}$$

Exercice 3. On considère la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où a, b, c sont des nombres donnés.

a. Calculer N^2 et N^3.

b. N est-elle inversible ?

Exercice 4. Une seule des trois matrices suivantes est inversible : laquelle ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -1 & 11 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -1 & 11 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -1 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Pour chacune des matrices A suivantes, calculer son déterminant $\det A$ et sa matrice complémentaire $\tilde{A}$. Donner aussi, dans le cas où elle existe, sa matrice inverse A^{-1}.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Calculer la matrice complémentaire de A.

b. Calculer le déterminant de A et montrer que A est inversible.

c. Calculer la matrice inverse A^{-1} de la matrice A.

d. Utiliser A^{-1} pour trouver la solution du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 18 \\ 2x + y + 2z = 17 \\ 2x + 2y + 3z = 25. \end{cases}$$

Exercice 7. On considère le système linéaire d'inconnues α, β, γ suivant : $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma = 32 \\ 25\alpha + 5\beta + \gamma = 3125. \end{cases}$

Écrire la matrice B de ce système. Calculer sa matrice complémentaire, son déterminant, puis son inverse. Résoudre le système.

Exercice 8. Résoudre le système $AX = C$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 9 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Exercice 9. Calculer le déterminant de la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & a \\ 1 & a & -1 \\ a & -1 & a+1 \end{pmatrix}$.

Pour quelles valeurs de a cette matrice est-elle inversible ?

Exercice 10. *(Examen 2018)* On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -7 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$.

a. Calculer la matrice complémentaire $\tilde{A}$ de A.

b. Calculer le déterminant de A. La matrice A est-elle inversible ?

c. Calculer le polynôme caractéristique P_A de A.
Vérifier que -1 est une racine de P_A.

d. Déterminer les valeurs propres de la matrice A.

Exercice 11. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

a. Calculer la matrice A^2.

b. Calculer le polynôme caractéristique de A et vérifier qu'il s'écrit $P_A(x) = x^3 - 8x^2 + 17x - 10$.

c. Trouver les trois valeurs propres de A.

d. Trouver les nombres α, β et γ tels que chaque valeur propre r de A vérifie $r^5 = \alpha r^2 + \beta r + \gamma$. On pourra utiliser les résultats de l'exercice 7.

e. On rappelle qu'on a alors $A^5 = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I$. Écrire la matrice A^5.

f. Retrouver ce résultat en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton 3 fois.

Exercice 12. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

On veut calculer rapidement A^n, où n est un entier naturel fixé.

a. Calculer A^2.

b. Calculer le polynôme caractéristique de A.

c. Trouver les valeurs propres de A.

d. Trouver les nombres α, β et γ tels que chaque valeur propre r de A vérifie $r^n = \alpha r^2 + \beta r + \gamma$.

e. Écrire la matrice A^n, sachant que $A^n = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I$.