Université de Caen
UFR Sciences
L2 Maths

2e semestre 2020-2021
Mathématiques
Analyse 4

Devoir Maison : Corrigé

Exercice 1.

a. *On pose $u_n = \frac{(3n)!}{3^n (n!)^3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.*
Le terme général est strictement positif, on applique le critère de D'Alembert. On simplifie :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(3n+3)! \times 3^n \times n!^3}{(3n)! \times 3^{n+1} \times (n+1)!^3} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{3(n+1)^3}.$$
Les polynômes au numérateur et au dénominateur sont équivalents, en $+\infty$, à leur terme dominant : $(3n+3)(3n+2)(3n+1) \sim (3n)^3 = 27n^3$ et $3(n+1)^3 \sim 3n^3$. On a donc $u_{n+1}/u_n \sim (27n^3)/(3n^3) = 9$. Autrement dit $\lim_{n\infty} u_{n+1}/u_n = 9 > 1$, le critère de D'Alembert montre donc que la série $\sum u_n$ diverge (grossièrement).

b. *On pose $v_n = \frac{(-1)^n}{n^2(2+\cos n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la série $\sum v_n$ converge.*
On pourra observer que $2 + \cos n \geq 1$ pour tout n.
On s'appuiera sur des théorèmes du cours pour démontrer la convergence.
Le terme général n'est pas de terme constant. Il ne s'agit pas d'une série alternée : à cause des oscillations du cosinus, $1/n^2(2+\cos n)$ n'est pas décroissante. On va utiliser la convergence absolue et le théorème de comparaison. À cause du cosinus, il est difficile de donner un équivalent « simple » du terme général et on va procéder plutôt avec une inégalité.
On a $\cos x \geq -1$ pour tout x, donc $2+\cos n \geq 2-1 = 1$ pour tout n. Cela implique $n^2(2+\cos n) \geq n^2 \times 1 = n^2$ puis $|v_n| = 1/n^2(2+\cos n) \leq \frac{1}{n^2}$ (les termes du produit et du quotient sont positifs). Comme $|v_n|$ et $\frac{1}{n^2}$ sont positif, le théorème de comparaison (par inégalité) s'applique. La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec exposant $\alpha > 1$) donc la série $\sum |v_n|$ converge. Autrement dit la série $\sum v_n$ converge absolument, ce qui implique qu'elle converge.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n \quad \text{et} \quad v_n = \frac{u_n}{S_n}.$$

a. *On suppse que la série $\sum u_n$ converge. Montrer que la série $\sum v_n$ converge.*
On pourra commencer par justifier que la suite $(S_n)_n$ admet une limite l strictement positive et on concluera à l'aide d'un théorème du cours.
Les S_n sont les sommes partielles de la série $\sum u_n$. Par définition, le fait que cette série converge signifie que la suite $(S_n)_n$ a une limite, appelons-la l. Comme les u_n sont positifs, on a $S_n \geq u_0$ pour tout n, en passant à la limite on obtient $l \geq u_0 > 0$. Une suite qui admet une limite *non nulle* est équivalente à sa limite, on a donc $S_n \sim l$ et $v_n = u_n/S_n \sim u_n/l$. La convergence de la série $\sum u_n$ implique celle de la série $\sum u_n/l$, comme cette série est à termes positifs le théorème de comparaison (par équivalent) s'applique et montre que la série $\sum v_n$ converge.

b. *Montrer que $\ln(1 - v_n) = \ln(S_{n-1}) - \ln(S_n)$ pour tout $n \geq 1$.*
On a $1 - v_n = 1 - \frac{u_n}{S_n} = \frac{S_n - u_n}{S_n} = \frac{S_{n-1}}{S_n}$. En prenant le ln on obtient l'identité demandée.

c. *On suppose que la série $\sum v_n$ converge. Montrer que la série $\sum \ln(1 - v_n)$ converge.*
On rédigera un raisonnement en commençant par justifier l'équivalent $-\ln(1-v_n) \sim v_n$ et en concluant à l'aide d'un théorème du cours.
La série $\sum v_n$ converge par hypothèse, en particulier son terme général v_n tend vers 0. On peut donc appliquer l'équivalent $\ln(1+t) \sim_0 t$ en posant $t = -v_n$ et on obtient $-\ln(1-v_n) \sim v_n$. Le terme général v_n est positif donc on peut appliquer le théorème de comparaison (par équivalent), la convergence de la série $\sum v_n$ implique celle de la série $-\sum \ln(1-v_n)$, donc aussi celle de la série $\sum \ln(1-v_n)$.

d. *On suppose que la série $\sum v_n$ converge. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.*
On rédigera un raisonnement en commençant par montrer, à l'aide des questions b et c, que la suite $(\ln(S_n))_n$ converge.
D'après la question c, la série $\sum \ln(1-v_n)$ converge. D'après la question b, on peut la voir comme une série télescopique. Plus précisément on a
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \ln(1-v_n) &= \sum_{n=1}^{N} (\ln(S_n) - \ln(S_{n-1})) = \sum_{n=1}^{N} \ln(S_n) - \sum_{n=1}^{N} \ln(S_{n-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \ln(S_k) - \sum_{k=0}^{N-1} \ln(S_k) = \ln(S_N) - \ln(S_0).\end{aligned}$$
On a posé $k = n$ dans la première somme et $k = n-1$ dans la seconde. La convergence de la série $\sum \ln(1-v_n)$ signifie que la quantité ci-dessus a une limite quand N tend vers $+\infty$, et donc que la suite $(\ln(S_N))_N$ converge. Par continuité de l'exponentielle, cela implique que la suite $(S_N)_N$ converge, ce qui signifie par définition que la série $\sum u_n$ converge.