Université de Caen
UFR Sciences
L2 Maths

2e semestre 2020-2021
Mathématiques
Analyse 4

# Devoir Maison

Il est particulièrement important pour ce devoir de soigner la précision des raisonnements et de la rédaction !

**Exercice 1.**

a. On pose $u_n = \dfrac{(3n)!}{3^n (n!)^3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

b. On pose $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2(2+\cos n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la série $\sum v_n$ converge.
*On pourra observer que $2 + \cos n \geq 1$ pour tout $n$.*
*On s'appuiera sur des théorèmes du cours pour démontrer la convergence.*

**Exercice 2.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n \quad \text{et} \quad v_n = \frac{u_n}{S_n}.$$

a. On suppse que la série $\sum u_n$ converge. Montrer que la série $\sum v_n$ converge.
*On pourra commencer par justifier que la suite $(S_n)_n$ admet une limite $l$ strictement positive et on concluera à l'aide d'un théorème du cours.*

b. Montrer que $\ln(1 - v_n) = \ln(S_{n-1}) - \ln(S_n)$ pour tout $n \geq 1$.

c. On suppose que la série $\sum v_n$ converge. Montrer que la série $\sum \ln(1 - v_n)$ converge.
*On rédigera un raisonnement en commençant par justifier l'équivalent $-\ln(1 - v_n) \sim v_n$ et en concluant à l'aide d'un théorème du cours.*

d. On suppose que la série $\sum v_n$ converge. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
*On rédigera un raisonnement en commençant par montrer, à l'aide des questions b et c, que la suite $(\ln(S_n))_n$ converge.*