Contrôle Continu n°1 — Corrigé

Quelques remarques générales...

a. Deux erreurs horribles qui devraient valoir un 0/20 pour les copies dans lesquelles elles apparaissent :
   — « x_n tend vers 0 donc $\sum x_n$ converge » : la convergence du terme général vers 0 est *nécessaire* pour que la série converge, mais elle ne *suffit* pas.
   — « $x_n \sim \frac{1}{n}$ et $y_n \sim \frac{1}{n}$ donc $x_n - y_n \sim 0$ » : on ne peut pas soustraire deux équivalents ; de plus les seules suites équivalentes à 0 sont celles qui sont nulles à partir d'un certain rang !

   Par ailleurs dans un certain nombre de copies on a l'impression que la notion de convergence d'une série n'est pas comprise.

b. Les manipulations avec les équivalents et avec les inégalités sont parfois fantaisistes. Il ne faut pas sous-estimer la difficulté de ces manipulations, qui réclament de l'entraînement, et il faut toujours les justifier précisément pour être sûr·e de ne pas écrire de bêtises, et pour progresser.

c. Les raisonnements et justifications qui figurent dans le corrigé ci-dessous ne sont pas là pour aider le lecteur à comprendre, ils sont là car ils sont mathématiquement nécessaires. Leur présence est également nécessaire pour que le correcteur attribue l'intégralité des points !

Exercice 1. *On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:*

$$a_n = 2^{-n}\sqrt{n!}, \qquad b_n = \frac{\sqrt{n} + e^{-n}}{(n+2)^2}, \qquad c_n = \frac{\cos(n^2)}{n^2 + \sqrt{n}}.$$

Déterminer la nature des séries $\sum a_n$, $\sum b_n$ et $\sum c_n$. On justifiera précisément les réponses.

— Comme $a_n > 0$ pour tout n on peut appliquer la règle de D'Alembert. On calcule donc

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{-(n+1)}\sqrt{(n+1)!}}{2^{-n}\sqrt{n!}} = 2^{-1}\sqrt{n+1}.$$

Ce quotient tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini. D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum a_n$ diverge (grossièrement).

— On calcule un équivalent du terme général b_n. On a $\lim_{n\infty} e^{-n} = 0$ et $\lim_{n\infty} \sqrt{n} = +\infty$, donc $e^{-n} = o(\sqrt{n})$, donc $\sqrt{n} + e^{-n} \sim_\infty \sqrt{n}$. Par ailleurs $(n+2)^2 \sim_\infty n^2$ car un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré en $+\infty$. En formant le quotient on obtient

$$b_n \sim_\infty \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Les termes $\frac{1}{n^{3/2}}$ sont positifs, on peut donc appliquer le théorème de comparaison par équivalents. La série $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge car c'est une série de Riemann avec exposant $\alpha = \frac{3}{2} > 1$. Donc la série $\sum b_n$ converge.

— Comme $|\cos(t)| \leq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\sqrt{t} \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a pour tout n la majoration suivante :

$$|c_n| = \frac{|\cos(n^2)|}{n^2 + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Le minorant $|c_n|$ est positif pour tout n, on peut donc appliquer le théorème de comparaison par inégalités. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$, avec exposant $\alpha = 2 > 1$, est convergente. Donc la série $\sum |c_n|$ converge. Autrement dit, la série $\sum c_n$ converge absolument, et cela implique qu'elle converge.

Exercice 2. *On pose* $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}$ *et* $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \ln(n + (-1)^n)$ *pour tout* $n \geq 3$.

a. *Montrer que la série* $\sum u_n$ *converge.*
Il peut être utile de vérifier que la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ *est décroissante sur* $[3, +\infty[$.
Vérifions tout d'abord que f est décroissante sur $[3, +\infty[$. On a

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

On a $x^2 > 0$ pour tout x, et comme la fonction ln est croissante on a pour $x \geq 3 : 1 - \ln(x) \leq 1 - \ln(3) \leq 1 - \ln(e) = 0$ (en effet $3 \geq e \simeq 2,78$). Donc $f'(x) \leq 0$ sur $[3, +\infty[$ et f est bien décroissante sur cet intervalle.
On note ensuite que la série $\sum u_n$ est une série alternée : en effet on a déjà vu que $\ln(n) \geq 1$ pour $n \geq 3$, donc $\ln(n)/n$ est positif pour tout $n \geq 3$. La suite $|u_n| = f(n)$ est décroissante pour $n \geq 3$ car f est décroissante sur $[3, +\infty[$, de plus elle tend vers 0 par croissances comparées. D'après le « critère spécial des séries alternées » (ou critère de Leibniz) on peut conclure que la série $\sum u_n$ converge.

b. *La série* $\sum u_n$ *est-elle absolument convergente ?*
On justifiera la réponse **sans** *utiliser de résultat sur les séries de Bertrand. On pourra par exemple partir de l'inégalité* $n \geq e$, *valable pour tout* $n \geq 3$.
On a déjà observé que $\ln(3) \geq \ln(e) = 1$ et que la fonction ln est croissante. Cela montre que $|u_n| = \ln(n)/n \geq 1/n$. Comme $1/n$ est positif pour tout n, le théorème de comparaison par inégalités s'applique. La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc $\sum |u_n|$ diverge. Par définition cela signifie que $\sum u_n$ ne converge pas absolument.

c. *Montrer que* $v_n \sim u_n$, *puis déterminer un « équivalent simple » de* $v_n - u_n$ *quand* $n \to \infty$.
On a $|(-1)^n| = 1$ pour tout n et $\lim_{n\infty} n = +\infty$, donc $(-1)^n = o(n)$ et $n + (-1)^n \sim_\infty n$. Les deux termes tendent vers $+\infty$ donc on peut prendre le log de cet équivalent. On obtient alors

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n} \ln(n + (-1)^n) \sim \frac{(-1)^n}{n} \ln(n) = u_n.$$

On calcule ensuite $v_n - u_n$ et on utilise l'équivalent $\ln(1 + t) \sim t$ en 0, en posant $t = \frac{(-1)^n}{n}$ qui tend bien vers 0 quand n tend vers l'infini :

$$\begin{aligned} v_n - u_n &= \frac{(-1)^n}{n}(\ln(n + (-1)^n) - \ln(n)) = \frac{(-1)^n}{n} \ln\left(\frac{n + (-1)^n}{n}\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \sim_\infty \frac{(-1)^n}{n} \times \frac{(-1)^n}{n} = \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

C'est l'équivalent simple recherché.

d. *Déterminer la nature de la série* $\sum v_n$.
On utilise l'équivalent de $v_n - u_n$ obtenu à la question précédente. Les termes $\frac{1}{n^2}$ sont positifs, on peut donc appliquer le théorème de comparaison par équivalents aux séries $\sum(v_n - u_n)$ et $\sum \frac{1}{n^2}$. Cette dernière est une série de Riemann avec exposant $\alpha = 2 > 1$ donc elle converge. Donc la série $\sum(v_n - u_n)$ converge. D'autre part on a vu à la question a que la série $\sum u_n$ converge. Comme la somme de deux séries convergentes est également convergente, on peut en déduire que $\sum v_n = \sum(v_n - u_n) + \sum u_n$ converge.
Note : on ne pouvait pas appliquer le théorème de comparaison à l'équivalent $u_n \sim_\infty v_n$ *car les termes* u_n, v_n *ne sont pas de signe constant.*

Exercice 3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et*

$$v_n = u_{n^2} + u_{n^2+1} + u_{n^2+2} + \cdots + u_{(n+1)^2} = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} u_k.$$

a. *On note $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.*
Montrer que pour tout $k \geq 2$ on a $\int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leq u_k \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t$.
La fonction racine carrée étant croissante et positive sur $\mathbb{R}_+^*$, f est décroissante. Pour $t \in [k, k+1]$ on a $t \geq k$ donc $f(t) \leq f(k)$. Par positivité de l'intégrale on en déduit $\int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} f(k)\mathrm{d}t = f(k) = u_k$. Pour $t \in [k-1, k]$ on a $t \leq k$ donc $f(k) \leq f(t)$ et $u_k = f(k) = \int_{k-1}^{k} f(k)\mathrm{d}t \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t$.
Un schéma illustrant ces inégalités entre intégrales était apprécié, mais ne constituait pas une preuve.

b. *En déduire que pour tout $n \geq 2$ on a $2\sqrt{n^2+2n+2} - 2n \leq v_n \leq 2(n+1) - 2\sqrt{n^2-1}$.*
On fait la sommes des encadrements obtenus à la question précédente, pour k variant de n^2 à $(n+1)^2$, puis on utilise la relation de Chasles :

$$\int_{n^2}^{(n+1)^2+1} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} u_k \leq \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t = \int_{n^2-1}^{(n+1)^2} f(t)\mathrm{d}t.$$

Par définition on a $\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} u_k = v_n$. Par ailleurs $2\sqrt{t}$ est une primitive de $f(t) = 1/\sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on peut donc calculer les intégrales ci-dessus :

$$\int_{n^2}^{(n+1)^2+1} f(t)\mathrm{d}t = \left[2\sqrt{t}\right]_{n^2}^{n^2+2n+2} = 2\sqrt{n^2+2n+2} - 2\sqrt{n^2} = 2\sqrt{n^2+2n+2} - 2n,$$
$$\int_{n^2-1}^{(n+1)^2} f(t)\mathrm{d}t = \left[2\sqrt{t}\right]_{n^2-1}^{(n+1)^2} = 2\sqrt{(n+1)^2} - 2\sqrt{n^2-1} = 2(n+1) - 2\sqrt{n^2-1}.$$

On obtient bien l'encadrement demandé.

c. *Établir les développements asymptotiques $\sqrt{n^2+2n+2} = n+1+o(1)$ et $\sqrt{n^2-1} = n+o(1)$ quand $n \to +\infty$. On rappelle le développement limité $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t + o(t)$ quand $t \to 0$.*
On a $\sqrt{n^2+2n+2} = \sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}\right)} = n\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}$. Comme $\lim_{n\infty} \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} = 0$, on peut utiliser le DL en 0 rappelé dans l'énoncé en posant $t = \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}$:

$$\sqrt{n^2+2n+2} = n\Big(1 + \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n^2} + o\big(\tfrac{1}{n}\big)\Big) = n\Big(1 + \tfrac{1}{n} + o\big(\tfrac{1}{n}\big)\Big) = n+1+o(1).$$

De la même manière, en posant $t = -\frac{1}{n^2}$, qui tend bien vers 0 quand $n \to \infty$:

$$\sqrt{n^2-1} = \sqrt{n^2\big(1-\tfrac{1}{n^2}\big)} = n\sqrt{1-\tfrac{1}{n^2}} = n\Big(1 - \tfrac{1}{2n^2} + o\big(\tfrac{1}{n^2}\big)\Big) = n\Big(1 + o\big(\tfrac{1}{n}\big)\Big) = n + o(1).$$

d. *Montrer que la suite $(v_n)_n$ converge et déterminer sa limite.*
On applique les développements asymptotiques de la question c pour étudier le comportement des bornes de l'encadrement obtenu à la question b :

$$2\sqrt{n^2+2n+2} - 2n = 2(n+1+o(1)) - 2n = 2 + o(1)$$
$$2(n+1) - 2\sqrt{n^2-1} = 2(n+1) - 2(n+o(1)) = 2 + o(1).$$

Autrement dit les deux bornes de l'encadrement convergent vers 2 quand n tend vers l'infini. D'après le « lemme des gendarmes », la suite $(v_n)_n$ converge également vers 2.

Exercice 4. *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes strictement positifs. On suppose que* $\sum u_n$ *diverge. Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *on note* $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

a. *Quel est le sens de variation de la suite* $(S_n)_n$ *? Justifier.*

Comme les termes u_n de la série sont positifs on a $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \geq S_n$ pour tout n. Donc la suite $(S_n)_n$ est croissante.

b. *Montrer que la suite* $(S_n^{-1})_n$ *tend vers* 0. *En déduire que la série* $\sum(S_n^{-1} - S_{n+1}^{-1})$ *converge, en étudiant la suite de ses sommes partielles.*

La suite $(S_n)_n$ est croissante donc elle converge, vers une limite finie ou vers $+\infty$. Comme la série diverge, elle n'a pas de limite finie. Donc $\lim_{n\infty} S_n = +\infty$ et $\lim_{n\infty} S_n^{-1} = 0$.

On calcule alors les sommes partielles de la série $\sum(S_n^{-1} - S_{n+1}^{-1})$ par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{n}(S_k^{-1} - S_{k+1}^{-1}) = \sum_{k=1}^{n} S_k^{-1} - \sum_{k=1}^{n} S_{k+1}^{-1} = \sum_{l=1}^{n} S_l^{-1} - \sum_{l=2}^{n+1} S_l^{-1} = S_1^{-1} - S_{n+1}^{-1}.$$

Comme $\lim_{n\infty} S_{n+1}^{-1} = 0$, on voit que les sommes partielles ci-dessus convergent (vers S_1^{-1}). Par définition, cela signifie que la série $\sum(S_n^{-1} - S_{n+1}^{-1})$ converge.

c. *Montrer que* $\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}} \geq \frac{u_{n+1}}{S_{n+1}^2}$. *On pourra commencer par réduire au même dénominateur.*

On a vu à la question a que $S_n \leq S_{n+1}$. Comme $S_{n+1} > 0$ on en déduit $0 < S_{n+1}S_n \leq S_{n+1}^2$ puis $1/S_nS_{n+1} \geq 1/S_{n+1}^2$ et enfin, comme $u_{n+1} \geq 0$: $u_{n+1}/S_nS_{n+1} \geq u_{n+1}/S_{n+1}^2$. On a alors

$$\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}} = \frac{S_{n+1} - S_n}{S_nS_{n+1}} = \frac{u_{n+1}}{S_nS_{n+1}} \geq \frac{u_{n+1}}{S_{n+1}^2}.$$

d. *Montrer que la série* $\sum \frac{u_n}{S_n^2}$ *converge.*

On utilise l'inégalité de la question précédente pour appliquer le théorème de comparaison par inégalités aux séries $\sum(S_n^{-1} - S_{n+1}^{-1})$ et $\sum u_{n+1}/S_{n+1}^2$. Comme les termes u_n sont positifs, les sommes partielles S_n également et donc la série $\sum u_{n+1}/S_{n+1}^2$ est à termes positifs, ce qui justifie l'utilisation du théorème. On a vu à la question b que la série $\sum(S_n^{-1} - S_{n+1}^{-1})$ converge, donc la série $\sum u_{n+1}/S_{n+1}^2$ converge. Comme un décalage des termes ne change pas la nature de la série, $\sum u_n/S_n^2$ converge.