Université de Caen
UFR Sciences
M1 MFA

2e semestre 2020-2021
Mathématiques
Analyse Fonctionnelle

Analyse Fonctionnelle
Contrôle terminal
2 avril 2021

Durée : 3 heures. Aucun document ni calculatrice n'est autorisé.
Les 4 exercices sont indépendants.

Exercice 1. On considère une série de fonctions $(\sum_{k\in\mathbb{N}^*} f_k)$ avec $f_k \in C([0,1],\mathbb{R})$ pour tout k. On suppose que la série converge simplement sur $[0,1]$. On note $S_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n f_k(x)$ les sommes partielles et $S : x \mapsto \sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ la somme de la série.

1. Rappeler l'énoncé d'un théorème de Dini (au choix).
2. On suppose que les fonctions f_k sont à *valeurs positives* et que S est continue sur $[0,1]$.
   Montrer que $(S_n)_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.
3. On considère le cas où $f_k(t) = \frac{1}{k}(t^k - t^{k+1})$.
   Calculer S et montrer que la série de fonctions $(\sum f_k)$ converge uniformément sur $[0,1]$.
4. On considère le cas où $f_k(t) = -t^k \ln(t),\ f(0) = 0$.
   La série $(\sum f_k)$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

Exercice 2.

1. Soit F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, et F^* son dual topologique. Montrer que si $x \in F$ est un vecteur *non nul*, il existe une forme linéaire $\varphi \in F^*$ telle que $\varphi(x) \neq 0$.
   On pourra utiliser le théorème de Hahn-Banach.

Soit E, F des $\mathbb{R}$-espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire. On suppose que pour toute forme linéaire continue $\varphi \in F^*$, la forme linéaire $\varphi \circ T \in E^*$ est également continue.

2. On note $G(T) \subset E \times F$ le graphe de T. Montrer que
$$G(T) = \{(x,y) \in E \times F \mid \forall \varphi \in F^* \quad \varphi \circ T(x) = \varphi(y)\}.$$
3. Montrer que l'application linéaire T est continue.

Exercice 3. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = C([0,1],\mathbb{R})$ et on note $\|\cdot\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur E. Pour $t \in [0,1]$ on note φ_t l'application linéaire $\varphi_t : E \to \mathbb{R},\ f \mapsto f(t)$.
On se donne de plus une autre norme $N : E \to \mathbb{R}$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :

— (E, N) est complet ;
— si f_n converge vers f relativement à N alors f_n converge simplement vers f.

1. On fixe $f \in E$. Montrer que la famille de nombres réels $\varphi_t(f)$, avec $t \in [0,1]$, est bornée.
2. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$ l'application φ_t est continue *relativement à* N.
3. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|f\|_\infty \leq CN(f)$ pour toute $f \in E$.
   On pourra utiliser le théorème de Banach-Steinhaus.
4. Montrer que N est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.
   On pourra appliquer un théorème du cours à l'application $\mathrm{Id} : E \to E$.

(suite au verso)

Exercice 4. Pour tout segment $S = [a, b] \subset [0, 1]$ on considère l'espace de fonctions continues $E_S = C(S, \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme sur S notée $\|f\|_S = \sup_{t \in S} |f(t)|$.
On considère un sous-espace *fermé* $F \subset E_S$ tel que toutes les fonctions $f \in F$ sont de classe C^1 sur S.
Pour $x \neq y$ dans S et $f \in E_S$ on pose $\varphi_{x,y}(f) = (f(x) - f(y))/(x - y)$.

1. Montrer que $\varphi_{x,y}$ est une forme linéaire continue sur E_S.
2. Montrer que pour $f \in F$ fixée l'ensemble $\{\varphi_{x,y}(f) \mid x, y \in S, x \neq y\}$ est borné dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute $f \in F$ et tous $x \neq y$ dans S on ait
$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \, \|f\|_S.$$
4. On fixe des points $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_l = b$ tels que $|t_{k+1} - t_k| \leq C^{-1}$ pour tout k.
Montrer que pour toute $f \in F$ on a $\sup_{t \in S} |f(t)| \leq \max_k |f(t_k)| + \frac{1}{2}\|f\|_S$.
5. Montrer que F est de dimension finie.

Dans les questions suivantes G est un sous-espace fermé de $E_{[0,1]} = C([0, 1], \mathbb{R})$ tel que toutes les fonctions $f \in G$ sont de classe C^1 sur $[0, 1[$ (noter la borne exclue).
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $S_n = [1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}]$, $G_n = \{f_{|S_n} \mid f \in G\} \subset E_{S_n}$ et C_n la constante obtenue pour $S = S_n$ et $F = G_n$ à la question 3. On découpe les intervalles S_n en sous-intervalles de largeur au plus C_n : on obtient une suite strictement croissante de points $t_k \in [0, 1]$ telle que $t_1 = 0$ et $\lim_{k\infty} t_k = 1$, et une suite strictement croissante d'indices $k_n \in \mathbb{N}^*$ telles que $t_{k_n} = 1 - \frac{1}{n}$ et $|t_{k+1} - t_k| \leq C_n^{-1}$ pour $k_n \leq k \leq k_{n+1}$.

6. Montrer que pour toute $f \in G$ on a $\sup_{t \in [0,1[} |f(t)| \leq \sup_k |f(t_k)| + \frac{1}{2}\|f\|_{[0,1]}$.
7. Montrer que pour toute $f \in G$ on a $\|f\|_{[0,1]} \leq 2 \sup_k |f(t_k)| \leq 2\|f\|_{[0,1]}$.

On note $L \subset l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ le sous-espace des suites réelles *convergentes*, muni de la norme $\|(x_k)_k\|_\infty = \sup_k |x_k|$.
On admet que L' est séparable, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble dénombrable de formes linéaires $\varphi_n \in L'$ qui est dense dans L'. On définit $J : E_{[0,1]} \to \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, $f \mapsto (f(t_k))_k$.

8. Montrer que J définit un isomorphisme, c'est-à-dire une bijection continue dont la bijection réciproque est continue, entre G et un sous-espace fermé $K \subset L$.
9. Montrer que G' est isomorphe à K', puis que G' est séparable.
On pourra utiliser le théorème de Hahn-Banach.