Université de Caen
UFR Sciences
M1 Maths

2e semestre 2020-2021
Mathématiques
Analyse Fonctionnels

Analyse Fonctionnelle
Partiel du 5 mars 2021
Corrigé

Exercice 1. *On définit une suite de fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ en posant $f_0(x) = 1$ et*

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\Big(f_n(x) + \frac{x}{f_n(x)}\Big).$$

1. *À l'aide d'une étude de fonction, montrer qu'on a $\frac{1}{2}(t + \frac{x}{t}) \geq \sqrt{x}$ pour tous $t \in \,]0,1]$, $x \in [0,1]$.*
   Fixons $x \in [0,1]$ et considérons $g(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{x}{t})$. On a $g'(t) = \frac{1}{2}(1 - \frac{x}{t^2})$, cette dérivée est positive **ssi** $t^2 \geq x$, on en déduit que g admet un minimum global atteint en $t = \sqrt{x}$. On a donc $g(t) \geq g(\sqrt{x}) = \sqrt{x}$ pour tout $t > 0$.
2. *En déduire que, pour $x \in [0,1]$ fixé, la suite $(f_n(x))_n$ est décroissante.*
   Une récurrence immédiate montre que $f_n(x) > 0$ pour tout n et pour tout x. En appliquant la question précédente avec $t = f_n(x)$ on trouve $f_{n+1}(x) \geq \sqrt{x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a aussi $f_n(x) \geq \sqrt{x}$ pour $n = 0$ par définition. On calcule alors

   $$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1}{2}\Big(\frac{x}{f_n(x)} - f_n(x)\Big) = \frac{x - f_n(x)^2}{2f_n(x)} \leq \frac{x - \sqrt{x}^2}{2f_n(x)} = 0,$$

   car la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
3. *Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge* uniformément *vers une fonction que l'on déterminera.*
   Étudions d'abord la convergence simple. Pour $x > 0$ fixé la suite $(f_n(x))_n$ est décroissante minorée d'après la question précédente, donc elle converge. Notons $f(x)$ sa limite, en passant à la limite dans l'inégalité $f_n(x) \geq \sqrt{x}$ on voit que $f(x) \geq \sqrt{x} > 0$, puis en passant à la limite dans la relation de récurrence on obtient, grâce à la continuité de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$: $f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + x/f(x))$. La seule solution dans $\mathbb{R}_+^*$ est $f(x) = \sqrt{x}$. Pour $x = 0$ l'équation de récurrence s'écrit $f_{n+1}(0) = \frac{1}{2}f_n(0)$, $(f_n(0))_n$ est une suite géométrique qui converge vers $f(0) = 0 = \sqrt{0}$.
   On applique maintenant le théorème de Dini sur l'intervalle $[0,1]$ qui est compact. Par une récurrence immédiate, les fonctions f_n sont continues. La limite simple $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est également continue. Enfin pour tout $x \in [0,1]$ la suite $(f_n(x))_n$ est décroissante. Le théorème s'applique donc et montre que la suite converge uniformément.

Exercice 2.
Soit $K \in C([-1,1]^2, \mathbb{R})$. On considère l'opérateur à noyau $T : C([-1,1], \mathbb{R}) \to C([-1,1], \mathbb{R})$ associé à K, c'est-à-dire donné par la formule suivante, pour $f \in C([-1,1], \mathbb{R})$ et $s \in [-1,1]$:

$$T(f)(s) = \int_{-1}^{1} K(s,t)f(t)\mathrm{d}t.$$

On munit $[-1,1]$ de la distance usuelle et $[-1,1]^2$ de la distance $d((s,t),(s',t')) = |s - s'| + |t - t'|$. On munit $C([-1,1], \mathbb{R})$ et $C([-1,1]^2, \mathbb{R})$ de la norme du sup, *notée $\|\cdot\|_\infty$.*

1. *Rappeler les théorèmes (et notamment leurs hypothèses) qui permettent d'affirmer :*
   — *que K est bornée sur $[-1,1]^2$:* Il s'agit du théorème des bornes : une fonction réelle continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

— *que K est uniformément continue sur $[-1,1]^2$:* Il s'agit du théorème de Heine : une fonction continue sur un compact est uniformément continue.

Rappeler la définition de la continuité uniforme de K sur $[-1,1]^2$. Cette définition s'écrit : $\forall \epsilon > 0 \ \exists \alpha > 0 \ \forall (s,t), (s',t') \in [-1,1]^2 \ \ d((s,t),(s',t')) \leq \alpha \Rightarrow |K(s,t) - K(s',t')| \leq \epsilon.$
Les deux dernières inégalités peuvent être strictes ou larges.

2. *On admet que $T(f)$ est bien un élément de $C([-1,1],\mathbb{R})$ pour toute $f \in C([-1,1],\mathbb{R})$.*
Montrer que l'application linéaire T est continue.
Montrons que T est une application linéaire bornée. Pour $f \in C([-1,1],\mathbb{R})$ on a d'après l'inégalité triangulaire pour les intégrales :

$$|T(f)(s)| \leq \int_{-1}^{1} |K(s,t)f(t)|\mathrm{d}t \leq \int_{-1}^{1} \|K\|_\infty \|f\|_\infty \mathrm{d}t = 2\|K\|_\infty \|f\|_\infty.$$

La norme $\|K\|_\infty$ est bien définie d'après la question 1. En passant au sup sur s on obtient l'inégalité $\|T(f)\|_\infty \leq 2\|K\|_\infty \|f\|_\infty$, qui montre que T est bornée avec $\|T\| \leq 2\|K\|_\infty$.

3. *On fixe $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel qu'on ait $|T(f)(s) - T(f)(s')| \leq 2\epsilon \|f\|_\infty$ pour toute $f \in C([-1,1],\mathbb{R})$ et tous s, $s' \in [-1,1]$ tels que $|s - s'| \leq \alpha$.*
On applique la continuité uniforme de K sur $[-1,1]^2$, justifiée à la question 1, avec le $\epsilon > 0$. Notons $\alpha > 0$ le réel obtenu. Alors pour tous s, $s' \in [-1,1]$ tels que $|s - s'| \leq \alpha$ et pour tout $t \in [-1,1]$ on a $d((s,t),(s',t)) = |s - s'| \leq \alpha$ donc $|K(s,t) - K(s',t)| \leq \epsilon$. Pour toute $f \in C([-1,1],\mathbb{R})$ on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} |T(f)(s) - T(f)(s')| &= \Big| \int_{-1}^{1} (K(s,t) - K(s',t)) f(t) \mathrm{d}t \Big| \\ &\leq \int_{-1}^{1} |K(s,t) - K(s',t)| \times |f(t)| \mathrm{d}t \leq \int_{-1}^{1} \epsilon \|f\|_\infty \mathrm{d}t = 2\epsilon \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

4. *On note $B = \{f \in C([-1,1],\mathbb{R}) \mid \|f\|_\infty \leq 1\}$ la boule unité fermée de $C([-1,1],\mathbb{R})$.*
Montrer que l'adhérence de $T(B)$ dans $C([-1,1],\mathbb{R})$ est compacte.
Il suffit d'appliquer le théorème d'Ascoli à $C = T(B)$. Notons tout d'abord que $[-1,1]$ est bien compact. Fixons $s \in [-1,1]$ et montrons l'équicontinuité de C en s. Pour $\epsilon > 0$ fixé, on applique la question précédente à $\frac{\epsilon}{2}$. Le réel $\alpha > 0$ obtenu convient : en effet, pour toute fonction $g \in C$ on peut écrire $g = T(f)$ avec $\|f\|_\infty \leq 1$ et on a alors, pour tout $s' \in [-1,1]$ tel que $|s - s'| \leq \alpha$, $|g(s) - g(s')| \leq 2\frac{\epsilon}{2}\|f\|_\infty = \epsilon$. Enfin, d'après la question 2 on a $\|g\|_\infty \leq 2\|K\|_\infty$ pour toute $g \in C$, donc pour tout $s \in [-1,1]$ l'ensemble $C_s := \{g(s) \mid g \in C\}$ est borné, donc d'adhérence compacte dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3. *On considère l'espace $E = c_0(\mathbb{N},\mathbb{C})$ des suites complexes $u = (u_n)_n$ telles que $\lim u_n = 0$, muni de la norme du sup. Pour $u \in E$ et $r > 0$ on note $B(u,r)$ la boule ouverte de centre u et de rayon r dans E. Le but de cet exercice est de donner une caractérisation des parties compactes de E. On note $G_n = \{u \in E \mid \forall k \geq n \ u_k = 0\} \subset E$ le sous-espace des suites nulles à partir du rang n. On considère l'application $P_n : E \to G_n$ donnée par $P_n(u) = (u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}, 0, 0, \ldots)$.*

1. *Montrer que les applications P_n et $Q_n = \mathrm{Id} - P_n$ sont continues.*
L'application P_n est clairement linéaire, de plus on a $\|P_n(u)\| = \sup_{k<n} |u_k| \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} |u_k| = \|u\|$ donc elle est bornée et continue. Alors Q_n est continue comme différence de deux applications continues.

2. *Montrer que $B(0,r) = \{v \in E \mid \forall k \ |v_k| < r\}$.*
L'inclusion $\subset$ est claire : si $v \in B(0,r)$ alors $\sup |v_k| < r$ donc $|v_k| < r$ pour tout k. Pour $\supset$, fixons $v \in E$ telle que $|v_k| < r$ pour tout k. Comme $\lim v_k = 0$, il existe un rang N à partir duquel on a $|v_k| < r/2$. Notons alors $M = \max_{k<N} |v_k|$, il existe un indice l tel que $M = |v_l|$ donc $M < r$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a alors $|v_k| \leq \max(M, r/2)$ donc $\|v\| \leq \max(M, r/2) < r$ et $v \in B(0,r)$.

3. *Soit $A \subset E$ une partie compacte. On fixe $\epsilon > 0$ et on considère $U_n = \{u \in E \mid \forall k \geq n \ |u_k| < \epsilon\}$.*

(a) *Montrer que U_n est un ouvert de E pour tout n. Montrer que les U_n recouvrent E.*
D'après la question 2 on a $U_n = Q_n^{-1}(B(0,\epsilon))$. Comme Q_n est continue et qu'une boule ouverte est un ouvert, U_n est un ouvert. Si u est un élément quelconque de E, la condition $\lim u_k = 0$ montre qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_k| < \epsilon$ pour tout $k \geq n$. On a alors $u \in U_n$ et cela montre que les U_n recouvrent E.

(b) *Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait, pour tout $k \geq N$ et toute suite $u \in A$: $|u_k| < \epsilon$.*
D'après la question précédente, les U_n forment un recouvrement ouvert du compact A (plus précisément, les $U_n \cap A$ forment un recouvrement de A par des ouverts *de* A), donc on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Il existe donc des indices $n_1, \dots, n_p$ tels que $A \subset U_{n_1} \cup \cdots \cup U_{n_p}$. Notons $N = \max(n_1, \dots, n_p)$. Soit $u \in A$. Il existe i tel que $u \in U_{n_i}$. Pour $k \geq N$ on a alors $k \geq n_i$ donc $|u_k| < \epsilon$ par définition de U_{n_i}.

(c) *On pose $v_k = \sup \{|u_k| \mid u \in A\}$. Montrer que $\lim v_k = 0$.*
On garde l'indice N de la question précédente. Pour tout $k \geq N$ et $u \in A$ on a $|u_k| < \epsilon$. En passant au sup sur $u \in A$ on obtient $v_k \leq \epsilon$, pour tout $k \geq N$. Comme on peut trouver un tel N pour tout $\epsilon > 0$, on a bien montré que $\lim v_k = 0$.

4. *Soit $A \subset E$. On suppose qu'il existe une suite $v \in E$ telle que $|u_k| \leq v_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et toute suite $u \in A$.*

(a) *On fixe $\epsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un ensemble fini $B \subset G_n$ tel que les boules $B(u,\epsilon)$ avec $u \in B$ recouvrent $P_n(A)$.*
L'hypothèse faite sur A implique que A est bornée : $\|u\| \leq \|v\|$ pour tout $u \in A$. Comme P_n est une application linéaire bornée, cela implique que $P_n(A)$ est une partie bornée de G_n. Comme G_n est de dimension finie, l'adhérence $\overline{P_n(A)}$ est compacte. En particulier elle est précompacte, on peut donc la recouvrir par un nombre fini de boules de rayon ϵ, et on prend pour B l'ensemble fini des centres de ces boules.

(b) *Montrer que, si on choisit bien l'indice n, les boules $B(u,\epsilon)$, $u \in B$, de la question précédente recouvrent A.*
On choisit n de telle manière que $v_k < \epsilon$ pour tout $k > n$. Soit alors $w \in A$. Il existe $u \in B$ tel que $P_n(w) \in B(u,\epsilon)$, autrement dit, $|w_k - u_k| < \epsilon$ pour tout $k \leq n$. Pour $k > n$ on a $u_k = 0$ car $u \in B \subset G_n$, et $|w_k| \leq v_k < \epsilon$, donc également $|w_k - u_k| < \epsilon$. D'après la question 2, cela montre que $w \in B(u,\epsilon)$. Donc les boules de la question précédentes recouvrent A.

(c) *Montrer que A est précompact.*
Pour tout rayon $\epsilon > 0$, on a réussi à recouvrir A par des boules ouvertes de rayon ϵ : c'est la définition de la précompacité. Si on est tatillon, on peut noter que les centres de ces boules ne sont pas forcément dans A. Pour y remédier, on peut sélectionner les $u \in B$ tels que $B(u,\epsilon)$ rencontre effectivement A, choisir un point $u' \in B(u,\epsilon) \cap A$, on a alors $B(u,\epsilon) \subset B(u', 2\epsilon)$ et les ensembles $B(u', 2\epsilon) \cap A$ sont donc des boules ouvertes *de* A, en nombre fini, de rayon 2ϵ, qui recouvrent A.

5. *Montrer qu'une partie $A \subset E$ est compacte si et seulement si elle est fermée et il existe une suite $v \in E$ telle que $|u_k| \leq v_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et toute suite $u \in A$.*
Comme tout compact est fermé, l'implication $\Rightarrow$ résulte immédiatement de la question 3. Pour la réciproque, on a montré à la question 4 que A est précompacte. Comme elle est fermée dans E qui est complet, elle est complète. Or une partie précompacte et complète est compacte.