Université de Caen
UFR Sciences
M1 Maths

2e semestre 2020-2021
Mathématiques
Analyse Fonctionnels

Analyse Fonctionnelle
Partiel du 5 mars 2021

Durée : 2 heures. Aucun document ni calculatrice n'est autorisé. Les 3 exercices sont indépendants. La notation tiendra compte de la qualité et de la précision de la rédaction.

Exercice 1. On définit une suite de fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ en posant $f_0(x) = 1$ et

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\Big(f_n(x) + \frac{x}{f_n(x)}\Big).$$

1. À l'aide d'une étude de fonction, montrer qu'on a $\frac{1}{2}(t + \frac{x}{t}) \geq \sqrt{x}$ pour tous $t \in]0,1]$, $x \in [0,1]$.
2. En déduire que, pour $x \in [0,1]$ fixé, la suite $(f_n(x))_n$ est décroissante.
3. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge *uniformément* vers une fonction que l'on déterminera.

Exercice 2.
Soit $K \in C([-1,1]^2, \mathbb{R})$. On considère l'opérateur à noyau $T : C([-1,1], \mathbb{R}) \to C([-1,1], \mathbb{R})$ associé à K, c'est-à-dire donné par la formule suivante, pour $f \in C([-1,1], \mathbb{R})$ et $s \in [-1,1]$:

$$T(f)(s) = \int_{-1}^{1} K(s,t) f(t) \mathrm{d}t.$$

On munit $[-1,1]$ de la distance usuelle et $[-1,1]^2$ de la distance $d((s,t),(s',t')) = |s-s'| + |t-t'|$. On munit $C([-1,1], \mathbb{R})$ et $C([-1,1]^2, \mathbb{R})$ de la norme du sup, notée $\|\cdot\|_\infty$.

1. Rappeler les théorèmes (et notamment leurs hypothèses) qui permettent d'affirmer :
   — que K est bornée sur $[-1,1]^2$,
   — que K est uniformément continue sur $[-1,1]^2$.

   Rappeler la définition de la continuité uniforme de K sur $[-1,1]^2$.
2. On admet que $T(f)$ est bien un élément de $C([-1,1], \mathbb{R})$ pour toute $f \in C([-1,1], \mathbb{R})$. Montrer que l'application linéaire T est continue.
3. On fixe $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel qu'on ait $|T(f)(s) - T(f)(s')| \leq 2\epsilon \|f\|_\infty$ pour toute $f \in C([-1,1], \mathbb{R})$ et tous s, $s' \in [-1,1]$ tels que $|s-s'| \leq \alpha$.
4. On note $B = \{f \in C([-1,1], \mathbb{R}) \mid \|f\|_\infty \leq 1\}$ la boule unité fermée de $C([-1,1], \mathbb{R})$. Montrer que l'adhérence de $T(B)$ dans $C([-1,1], \mathbb{R})$ est compacte.

(suite au verso)

Exercice 3. On considère l'espace $E = c_0(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ des suites complexes $u = (u_n)_n$ telles que $\lim u_n = 0$, muni de la norme du sup. Pour $u \in E$ et $r > 0$ on note $B(u, r)$ la boule ouverte de centre u et de rayon r dans E. Le but de cet exercice est de donner une caractérisation des parties compactes de E.
On note $G_n = \{u \in E \mid \forall k \geq n \ u_k = 0\} \subset E$ le sous-espace des suites nulles à partir du rang n. On considère l'application $P_n : E \to G_n$ donnée par $P_n(u) = (u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}, 0, 0, \ldots)$.

1. Montrer que les applications P_n et $Q_n = \mathrm{Id} - P_n$ sont continues.
2. Montrer que $B(0, r) = \{v \in E \mid \forall k \ |v_k| < r\}$.
3. Soit $A \subset E$ une partie compacte. On fixe $\epsilon > 0$ et on considère $U_n = \{u \in E \mid \forall k \geq n \ |u_k| < \epsilon\}$.
   (a) Montrer que U_n est un ouvert de E pour tout n. Montrer que les U_n recouvrent E.
   (b) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait, pour tout $k \geq N$ et toute suite $u \in A$: $|u_k| < \epsilon$.
   (c) On pose $v_k = \sup\{|u_k| \mid u \in A\}$. Montrer que $\lim v_k = 0$.
4. Soit $A \subset E$. On suppose qu'il existe une suite $v \in E$ telle que $|u_k| \leq v_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et toute suite $u \in A$.
   (a) On fixe $\epsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un ensemble fini $B \subset G_n$ tel que les boules $B(u, \epsilon)$ avec $u \in B$ recouvrent $P_n(A)$.
   (b) Montrer que, si on choisit bien l'indice n, les boules $B(u, \epsilon)$, $u \in B$, de la question précédente recouvrent A.
   (c) Montrer que A est précompact.
5. Montrer qu'une partie $A \subset E$ est compacte si et seulement si elle est fermée et il existe une suite $v \in E$ telle que $|u_k| \leq v_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et toute suite $u \in A$.