Université de Caen
UFR Sciences
M1 Maths

2e semestre 2020-2021
Mathématiques
Analyse Fonctionnelle

Espaces vectoriels normés et topologie

Exercice 1. On munit les $\mathbb{R}$-EVN $\mathbb{R}^n$ et $M_n(\mathbb{R})$ de la topologie associée à n'importe quelle norme.

a. Montrer que $\mathbb{Z}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

b. Montrer que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y < 3x - y\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

c. Représenter l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 \leq 1 \text{ et } x^2 + y^2 < 2\}$. Est-il ouvert ? fermé ?

d. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.

e. Montrer que l'ensemble $\Delta_n \subset M_n(\mathbb{R})$ des matrices diagonalisables n'est ni ouvert ni fermé.

f. Montrer que $\{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \forall\, V \in \mathbb{R}^n\ V \cdot MV \geq 0\}$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Dans cet exercice E est un espace métrique et on note $B_o(a, r)$ (resp. $B_f(a, r)$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre a et rayon r.

a. On se place dans $E =]-\infty, 0] \cup [1, 2] \cup]3, +\infty[$, muni de la distance induite par la distance usuelle de $\mathbb{R}$. On note $B_o = B_o(1, 1)$ et $B_f = B_f(1, 1)$. Expliciter les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$:

$$B_o,\ \ B_f,\ \ \overset{\circ}{B}_o,\ \ \overline{B_f},\ \ \overline{B_o},\ \ \overset{\circ}{B}_f.$$

b. Dans cette question E est un espace vectoriel normé. On fixe $a \in E$, $r > 0$ et on note $B_o = B_o(a, r)$, $B_f = B_f(a, r)$. Montrer que $\overline{B_o} = B_f$ et $\overset{\circ}{B}_f = B_o$.

Exercice 3. La *frontière* d'une partie A d'un espace topologique est $\mathrm{Fr}(A) = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

a. Quelle est la frontière de $[1, 2]$ dans $\mathbb{R}$? dans $E =]-\infty, 0] \cup [1, 2] \cup]3, +\infty[$ muni de la distance induite ?
Quelle est la frontière de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$?

b. Montrer que $\mathrm{Fr}(A)$ est un fermé. Montrer qu'il est vide **ssi** A est à la fois ouvert et fermé.

c. Montrer que $x \in \mathrm{Fr}(A)$ **ssi** tout ouvert contenant x rencontre à la fois A et ${}^cA$.
Montrer que $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}({}^cA)$.

d. Montrer que A est fermé **ssi** A contient sa frontière.
Montrer que A est ouvert **ssi** A ne rencontre pas sa frontière.

Exercice 4. Soient E un EVN, A et B deux parties non vides de E. On définit $A + B$ par

$$A + B = \{x + y \mid (x, y) \in A \times B\}.$$

a. On suppose que A est un ouvert de E. Montrer que $A + B$ est ouvert.

b. On suppose que A est un fermé de E et que B est fini. Montrer que $A + B$ est fermé.

c. Si B est fini, il est en particulier fermé. Le résultat de la question précédente est-il toujours vrai si on suppose seulement que A et B sont fermés ?

Exercice 5. On considère l'espace vectoriel $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$.
Pour $f \in E$ on pose $\|f\| = \sup_{t\in[0,1]} |tf(t)|$.
On définit par ailleurs des formes linéaires φ, $\psi : E \to \mathbb{R}$ en posant $\varphi(f) = \int_0^1 t^2 f(t)\mathrm{d}t$ et $\psi(f) = f(0)$.

a. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.

b. Montrer que la forme linéaire φ est continue. Déterminer $\|\varphi\|$.

c. La forme linéaire ψ est-elle continue ? *On pourra considérer les fonctions* $f_n : t \mapsto (t + \frac{1}{n})^{-1}$.

d. Les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 6. Si N, N' sont deux normes sur $E = \mathbb{R}^n$, on note $\|M\|_{N\to N'}$ la norme d'opérateur d'une matrice $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ vue comme application linéaire de $(\mathbb{R}^n, N)$ vers $(\mathbb{R}^n, N')$.

a. Montrer que $\|M\|_{N_1\to N_1} = \max_j \sum_i |m_{ij}|$.

b. Montrer que $\|M\|_{N_\infty\to N_\infty} = \max_i \sum_j |m_{ij}|$.

c. Montrer que $\|M\|_{N_\infty\to N_1} \leq \sum_{ij} |m_{ij}|$.
Donner un exemple de matrice M telle que cette inégalité soit une égalité, et un exemple tel qu'elle soit stricte.

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel normé et $\varphi \in E^*$ une forme linéaire non bornée sur E.

a. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n\ \|x_n\| = 1$ et $\lim_{n\to\infty} |\varphi(x_n)| = +\infty$.

b. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n\ \varphi(x_n) = 1$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

c. Soit $y \in E$ tel que $\varphi(y) = 1$.
Montrer qu'il existe une suite $(z_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n\ \varphi(z_n) = 0$ et $\lim_{n\to\infty} z_n = y$.

d. Montrer que $\operatorname{Ker}\varphi$ est dense dans E.

e. Montrer qu'une forme linéaire $\varphi \in E^*$ est continue **ssi** son noyau est fermé.
Ce résultat reste-t-il vrai pour une application linéaire $\varphi : E \to F$?

Exercice 8. On considère $E = C^1([-1,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme.

a. Soit $f \in E$ une fonction telle que $\forall g \in E\ \int_{-1}^{1} fg = 0$. Montrer que $f = 0$.

b. Montrer que $\varphi : E \to \mathbb{R}, f \mapsto f'(0)$ n'est pas continue.

c. Montrer que $F = \{f \in E \mid f'(0) = 0\}$ est dense dans E.

d. Soit $f \in E$ une fonction telle que $\forall g \in F\ \int_{-1}^{1} fg = 0$. Montrer que $f = 0$.

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel normé non nul et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $u \circ v - v \circ u = \lambda \mathrm{Id}$.

a. Montrer que $u \circ v^{n+1} - v^{n+1} \circ u = \lambda(n+1)v^n$ pour tout n.

b. (i) On suppose que $v^n \neq 0$. Montrer que $(n+1)|\lambda| \leq 2\|u\|\|v\|$.

(ii) On suppose que $\lambda \neq 0$. Montrer qu'il existe n tel que $v^n = 0$. En déduire que $v = 0$.

(iii) Montrer qu'on a nécessairement $\lambda = 0$.

c. On prend $E = C^\infty([0,1])$, muni de la norme de la convergence uniforme $N = \|\cdot\|_\infty$.
On pose $u(f) = f'$ et $v(f) = (t \mapsto tf(t))$. Calculer $u \circ v - v \circ u$. Conclusion ?

Exercice 10. On considère l'espace $H = L^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$. On note $\mathcal{L}(H)$ l'espace des applications linéaires continues de H dans H, muni de la norme d'opérateur. Étant donnée $K : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ mesurable, on souhaite construire l'*opérateur à noyau* $T : H \to H$ associé à K, donné par la formule

$$T(f)(s) = \int_0^\infty K(s,t)f(t)\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Il faut pour cela que l'intégrale converge pour presque tout s, et que $T(f)$ appartienne à $L^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. On suppose que K est à valeurs positives et qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ et $p, q : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ mesurables telles qu'on ait presque partout :

$$\int_0^\infty p(s)K(s,t)\mathrm{d}s \leq \beta q(t) \quad \text{et} \quad \int_0^\infty K(s,t)q(t)\mathrm{d}t \leq \alpha p(s).$$

a. (i) Soit $f \in H$. Montrer que le membre de gauche de l'inégalité suivante est bien défini pour presque tout $s \in \mathbb{R}_+^*$, puis la validité de l'inégalité :

$$\Big(\int_0^\infty K(s,t)f(t)\mathrm{d}t\Big)^2 \leq \alpha\ p(s) \int_0^\infty K(s,t)f(t)^2 q(t)^{-1}\mathrm{d}t.$$

On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

(ii) En déduire que l'équation (1) définit un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\|T\| \leq \sqrt{\alpha\beta}$.

b. On considère maintenant l'exemple donné par $K(s,t) = (1+s+t)^{-1}$.

(i) Calculer la dérivée de $\varphi : x \mapsto \arctan(\sqrt{x}/\sqrt{a})$. En déduire que

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+s+t)\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sqrt{s+1}}.$$

(ii) Montrer que pour ce noyau K l'équation (1) définit un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\|T\| \leq \pi$.

(iii) Pour cet exemple, a-t-on $K \in L^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$?