Compacité

Exercice 1.

a. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|(m_{ij})_{ij}\| = \max_{ij} |m_{ij}|$. On note $O_n \subset M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales. Montrer que O_n est compact.

b. Soit E un EVN. On note B la boule unité fermée de E et S la sphère unité de E. Montrer que B est compacte si et seulement si S est compacte. Pour quels espaces E la sphère S est-elle compacte ?

c. (i) On fixe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $F = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid Mv = \lambda v\}$ est fermé.

(ii) On fixe $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $G = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \exists v \neq 0 \ Mv = \lambda v\}$ est fermé.

Exercice 2. Soit $(F_n)_n$ une suite de fermés emboîtés non vides dans un espace topologique compact X. On note $F = \bigcap_n F_n$. Soit O un ouvert tel que $F \subset O$. Montrer qu'il existe n tel que $F_n \subset O$.
Indication : on pourra poser $O_n = O \cup {}^cF_n$.

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{R}$-EVN et $K \subset E$ une partie compacte, convexe, non vide. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire (ou affine) continue telle que $T(K) \subset K$. On veut montrer qu'il existe $x \in K$ tel que $T(x) = x$. Pour cela on note $T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n T^k$.

a. Montrer que $T_n(K)$ est un fermé contenu dans K pour tout n.

b. Montrer que $T_nT_m = T_mT_n$.
En déduire que $T_{n_1}(K) \cap \cdots \cap T_{n_p}(K)$ est non vide pour toute famille finie d'indices $n_1, \ldots, n_p$.

c. Montrer que $L = \bigcap_n T_n(K)$ est non vide. On fixe $x \in L$.

d. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on choisit $y \in K$ tel que $x = T_n(y)$. Calculer $T(x) - x$ en fonction de y. Conclure.

Exercice 4. On définit une suite de fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par récurrence en posant, pour tout $t \in [0,1]$: $f_0(t) = 0$ et $f_{n+1}(t) = f_n(t) + \frac{1}{2}(t - f_n(t)^2)$.

a. On fixe $t \in [0,1]$. Étudier la suite récurrente $(f_n(t))_n$.
On montrera notamment qu'elle est croissante et converge vers un réel $g(t)$ que l'on calculera.

b. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers g.

Exercice 5. *(Partiel 2018)*
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

a. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction qu'on calculera.

b. On pose $g_n(x) = \ln(f_{n+1}(x)) - \ln(f_n(x))$ pour $x \in]-n, +\infty[$. Étudier les variations, puis le signe de g_n.

c. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Exercice 6.

a. Soit X, Y des espaces métriques compacts et $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et des fonctions continues $f_1, \ldots, f_n : X \to \mathbb{R}$, $g_1, \ldots, g_n : Y \to \mathbb{R}$ telles qu'on ait $|h(x,y) - \sum_{i=1}^n f_i(x)g_i(y)| \leq \epsilon$ pour tout $(x,y) \in X \times Y$.

b. Montrer que toute fonction continue $h : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ est limite uniforme de fonctions polynomiales.

Exercice 7. Soit $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ le disque unité fermé dans $\mathbb{C}$. On note $A \subset C(D, \mathbb{C})$ le sous-espace des fonctions polynômiales $f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ (avec $a_k \in \mathbb{C}$) et on munit $C(D, \mathbb{C})$ de la norme du sup.

a. Montrer que A est une sous-algèbre unifère de $C(D, \mathbb{C})$ qui sépare les points.

b. Montrer que l'application $\varphi : f \mapsto (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \mathrm{d}t$ est continue sur $C(D, \mathbb{C})$.

c. Montrer que pour tout $f \in A$ on a $\varphi(f) = f(0)$.

d. Montrer que A n'est pas dense dans $C(D, \mathbb{C})$.

e. Quelle hypothèse faut-il rajouter au théorème de Stone-Weierstraß dans le cas de fonctions à valeurs complexes ?

Exercice 8. On considère l'espace $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$, et l'espace $F = C^1([0,1], \mathbb{R})$ de muni de la norme $N : f \mapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. On fixe un sous-espace $V \subset E \cap F$ fermé dans E.

a. Montrer que V est fermé dans F. Montrer que $\mathrm{Id} : (V, N) \to (V, \|\cdot\|_\infty)$ est continue.
D'après le théorème des isomorphismes de Banach, l'application réciproque est également continue.

b. Montrer que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N sont équivalentes sur le sous-espace V.

c. On note $\bar{B}$ la boule unité fermée de V relativement à la norme $\|\cdot\|_\infty$.
Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que toutes les fonctions $f \in \bar{B}$ sont lipschitziennes de rapport C.

d. Montrer que $\bar{B}$ est équicontinue.

e. Montrer que V est nécessairement de dimension finie.

Exercice 9. *(Partiel 2017)*
Soit E un espace vectoriel normé et $T \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire continue.
Pour tout nombre complexe λ on note $E_\lambda(T) = \{x \in E \mid T(x) = \lambda x\}$.
On note $B = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ la boule unité fermée de E et $\lambda B = \{\lambda x \mid x \in B\} = \{x \in E \mid \|x\| \leq |\lambda|\}$.

On suppose que l'adhérence de $T(B)$ dans E est compacte et on fixe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

a. Montrer que $\lambda B \cap E_\lambda(T) \subset T(B)$.

b. Montrer que $B \cap E_\lambda(T)$ est compact.

c. Montrer que le sous-espace propre $E_\lambda(T)$ est de dimension finie.

Exercice 10. *(Partiel 2018)*
On considère l'espace $H = L^2([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$. On note $\mathcal{L}(H)$ l'espace des applications linéaires continues de H dans H, muni de la norme d'opérateur.
Pour toute fonction $K \in C([0,1]^2, \mathbb{R})$, on considère l'*opérateur à noyau* associé $T : H \to H$, donné par la formule suivante :

$$T(f)(s) = \int_0^1 K(s,t) f(t) \mathrm{d}t.$$

On admet la convergence de l'intégrale ci-dessus, ainsi que la linéarité de l'application T.
On note $\mathrm{Pol} \subset C([0,1]^2, \mathbb{R})$ le sous-espace des fonctions polynomiales.

a. Montrer que pour $f \in H$ on a bien $T(f) \in H$, puis que $T : H \to H$ est continue avec $\|T\| \leq \|K\|_\infty$.

b. On considère le cas où le noyau K est polynomial : $K(s,t) = \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N a_{k,l} s^k t^l$.
  (i) Montrer que $T(f)$ est alors un polynôme, dont on calculera les coefficients en fonctions des coefficients $a_{k,l}$ et des *moments* de f donnés par la formule $m_l(f) = \int_0^1 t^l f(t) \mathrm{d}t$.
  (ii) Montrer que dans ce cas T est une application linéaire de rang fini, i.e. $\dim \mathrm{Im}\, T < +\infty$.

c. Montrer que toute fonction continue $K \in C([0,1]^2, \mathbb{R})$ est limite uniforme de polynômes $P \in \mathrm{Pol}$.
On appliquera le théorème de Stone-Weierstraß après avoir soigneusement vérifié ses hypothèses.

d. Montrer que tout opérateur à noyau T associé à un noyau K continu sur $[0,1]^2$ est limite dans $\mathcal{L}(H)$ d'applications linéaires de rang fini.

Exercice 11. *(Partiel 2018)*
On considère l'espace $E = \{f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C} \mid f \text{ continue et } f(-\pi) = f(\pi)\}$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On note $B \subset E$ le sous-ensemble formé des fonctions $f : t \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$ avec $\sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + k^2)|c_k|^2 \leq 1$.

a. Soit $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ telle que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + k^2)|c_k|^2 \leq 1$. Montrer que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2}\right)^{1/2}$.
On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour les séries.

Le résultat de la question 1 montre en particulier que pour $f \in B$ la série de fonction $f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$ converge normalement, donc f est bien continue.

b. On fixe $t \in [-\pi, \pi]$. Montrer que $\lim\limits_{s \to t} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2} |e^{iks} - e^{ikt}|^2 = 0$.

c. On fixe $f \in B$. Montrer qu'on a $|f(s) - f(t)| \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2} |e^{iks} - e^{ikt}|^2\right)^{1/2}$ pour tous $s, t \in [-\pi, \pi]$.

d. On fixe $t \in [-\pi, \pi]$ et $\epsilon > 0$. À l'aide des questions 2 et 3, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $|f(s) - f(t)| \leq \epsilon$ pour tout s tel que $|s - t| \leq \alpha$ et pour toute $f \in B$.

e. Montrer que l'adhérence de B dans E est compacte.

f. Soit $(f_n)_n \in E$ une suite de fonctions.
On suppose que chaque f_n est de classe C^1 et vérifie $\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(t)|^2 \mathrm{d}t \leq \pi$ et $\int_{-\pi}^{\pi} |f_n'(t)|^2 \mathrm{d}t \leq \pi$.
Montrer que $(f_n)_n$ admet une sous-suite qui converge uniformément.

La question 6 utilise des résultats de la théorie des séries de Fourier. On rappelle notamment l'identité de Parseval : $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t$, pour $f : t \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$.