Espaces de Banach

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que pour tout $x \geq 0$ la suite $(f(kx))_k$ est bornée. Montrer que f est bornée. *On pourra montrer que l'un des ensembles $F_N = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid \forall k\ |f(kx)| \leq N\}$ n'est pas d'intérieur vide .*

Exercice 2. On munit $E = \mathcal{C}([0,1])$ de la norme de la convergence uniforme et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère le sous-ensemble suivant de E :

$$U_n = \{f \in E \mid \forall x \in [0,1] \quad \exists y \in [0,1] \quad |f(x) - f(y)| > n|x-y|\}.$$

a. Montrer que U_n est un ouvert de E.
On pourra montrer que ${}^c U_n$ est fermé à l'aide de la caractérisation séquentielle.

b. Montrer que U_n est dense dans E.
Soit g une fonction affine par morceaux dont les pentes sont plus grandes que N en valeur absolue et telle que $\|g\|_\infty \leq \epsilon$. On commencera par montrer que si f est de classe C^1 et N est bien choisi, alors $f + g \in U_n$.

c. Montrer qu'il existe une partie dense de $\mathcal{C}([0,1])$ dont les éléments ne sont dérivables en aucun point de $[0,1]$.
Pour f et $x \in [0,1]$ fixés on pourra considérer la fonction $\phi_x : y \mapsto (f(x) - f(y))/(x-y)$.

Exercice 3. Soit E un espace de Banach.

a. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E distinct de E. Montrer que F ne contient aucune des boules $B(0,r)$, pour $r > 0$. Montrer que F est d'intérieur vide.

b. On suppose que E est réunion de sous-espaces fermés F_n. Montrer qu'il existe n tel que $E = F_n$.

c. Montrer qu'un espace de Banach de dimension infinie n'admet pas de base (algébrique) dénombrable.

Exercice 4. Soit E un espace de Banach, décomposé sous la forme $E = F \oplus G$. On note p la projection sur F parallèlement à G.

a. Exprimer F et G à l'aide de p. En déduire que si p est continue, F et G sont fermés.

b. À l'aide du théorème du graphe fermé, montrer que si F et G sont fermés alors p est continue.

Exercice 5. *(Examen 2018)* Soit E, F des espaces de Banach et $S \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire continue.

a. On suppose qu'il existe $T \in \mathcal{L}(F,E)$ telle que $T \circ S = \mathrm{Id}$.

(i) Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $\|S(x)\| \geq M\|x\|$.

(ii) Montrer que S est injective et que $\operatorname{Im} S$ est fermée.

(iii) Montrer que $\operatorname{Ker} T$ est un supplémentaire fermé de $\operatorname{Im} S$.

b. On suppose maintenant que S est injective, que $\operatorname{Im} S$ est fermée, et que $\operatorname{Im} S$ admet un supplémentaire fermé $F_0 \subset F$. On considère $G = \{(S(x) + z, x) \mid x \in E,\ z \in F_0\} \subset F \times E$, et l'espace $F \times E$ est muni de la norme $\|(y,x)\| = \|y\|_F + \|x\|_E$.

(i) Montrer que G est le graphe d'une application $T : F \to E$.
On admet que, comme G est un sous-espace, T est linéaire.

(ii) Montrer que : $(y,x) \in G \Leftrightarrow y - S(x) \in F_0$.

(iii) Montrer que T est continue.

(iv) Montrer que $T \circ S = \mathrm{Id}$.

c. On considère le cas $E = F = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, et on suppose que $S \in \mathcal{L}(E)$ est une *isométrie*, c'est-à-dire qu'on a $\|S(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$. Montrer qu'il existe $T \in \mathcal{L}(E)$ tel que $T \circ S = \mathrm{Id}$.

Exercice 6. On cherche à estimer la norme dans $L^1([0,2\pi])$ du noyau de Dirichlet

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)}.$$

Pour cela on découpe l'intégrale aux points où D_n change de signe :

$$\|D_n\|_1 = 2\int_0^\pi |D_n(t)|\mathrm{d}t = 2\sum_{k=0}^{n-1} I_{n,k} + 2\int_{\frac{2n\pi}{2n+1}}^{\pi} |D_n(t)|\mathrm{d}t, \quad \text{avec} \quad I_{n,k} = \int_{\frac{2k\pi}{2n+1}}^{\frac{2(k+1)\pi}{2n+1}} |D_n(t)|\mathrm{d}t.$$

a. En utilisant l'inégalité $\sin x \leq x$ valable sur $\mathbb{R}_+$, montrer que $I_{n,k} \geq 4/((k+1)\pi)$.

b. En déduire que $\|D_n\|_1$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 7. Pour $f \in L^1([0,2\pi])$ on note $c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}f(t)\mathrm{d}t$ le k^{e} coefficient de Fourier de f et on considère la transformée de Fourier $T : L^1([0,2\pi]) \to \ell^\infty(\mathbb{Z})$, $f \mapsto (c_n(f))_n$. On rappelle que T est injective et que son image est contenue dans $c_0(\mathbb{Z})$ (*lemme de Riemann-Lebesgue*). On va montrer qu'il existe des suites $(c_n)_n \in c_0(\mathbb{Z})$ qui ne sont les suites de coefficients de Fourrier d'aucune fonction $f \in L^1([0,2\pi])$.

a. Montrer que T est un opérateur borné relativement à la norme de $L^1([0,2\pi])$ et à la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $c_0(\mathbb{Z})$.

b. Étudier le comportement de $\|T(D_n)\|_\infty/\|D_n\|_1$ lorsque $n \to \infty$, où D_n est le noyau de Dirichlet étudié à l'exercice 6.

c. À l'aide du théorème des isomorphismes de Banach, montrer que $\operatorname{Im} T \neq c_0(\mathbb{Z})$.

Exercice 8. Soit E l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues et 2π-périodiques, muni de la norme de la convergence uniforme. On note $c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}f(t)\mathrm{d}t$ le k^{e} coefficient de Fourier de $f \in E$ et $S_n(f) : t \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikt} \in E$ les sommes partielles symétriques de la série de Fourier associée à f. On fixe $t \in [0,2\pi]$ et on considère la forme linéaire $L_n : f \mapsto S_n(f)(t)$.

a. Montrer que $L_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)D_n(t-s)\mathrm{d}s$, où D_n est le noyau de Dirichlet introduit à l'exercice 6.

b. Montrer que $\|L_n\| = \frac{1}{2\pi}\|D_n\|_1$. *On pourra utiliser la densité de $C([0,1])$ dans $L^1([0,1])$.*

c. À l'aide du théorème de Banach-Steinhaus, montrer qu'il existe une fonction $f \in E$ telle que la série de Fourier de f ne converge pas au point t.

Exercice 9. Soit E un EVN et $X \subset E$ une partie de E telle que, pour toute forme linéaire continue $\varphi \in E'$, l'ensemble $\varphi(X) \subset \mathbb{R}$ est borné.

a. À l'aide du principe de la borne uniforme, montrer l'existence d'une constante $M > 0$ telle que $|\varphi(x)| \leq M\|\varphi\|$ pour tout $x \in X$ et toute $\varphi \in E'$.

b. En déduire que X est borné (en norme) dans E.

c. Soit $K \subset E$ une partie compacte pour la topologie faible. Montrer que K est bornée.

d. Le résultat précédent reste-t-il valable pour un compact préfaible dans le dual d'un EVN ?

Exercice 10. *(Examen 2018)*
On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme.

Pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on définit $\varphi_n(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\tfrac{k}{n})$.

a. Montrer que φ_n est une forme linéaire continue sur E telle que $\|\varphi_n\| \leq 2$.

b. En utilisant des fonctions affines par morceaux, montrer que $\|\varphi_1\| = 2$.
On admet qu'on a plus généralement $\|\varphi_n\| = 2$ pour tout n.

c. On fixe $f \in E$. Énoncer le résultat d'intégration qui permet de montrer que $\lim_{n\infty} \varphi_n(f) = 0$.

d. On souhaite montrer qu'il existe des fonctions $f \in E$ telle que $\varphi_n(f)$ tend vers 0 « arbitrairement lentement ». On fixe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\varepsilon_n > 0$ pour tout n et $\lim_{n\infty} \varepsilon_n = 0$. On suppose, par l'absurde, que pour toute fonction $f \in E$ on a $\varphi_n(f) = O(\varepsilon_n)$.

En appliquant le théorème de Banach-Steinhaus à une suite de formes linéaires bien choisies, montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|\varphi_n\| \leq C\varepsilon_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Conclure.

e. On suppose que f est K-lipschitzienne : pour tous $x, y \in [0,1]$ on a $|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|$.
Montrer que $\varphi_n(f) = O(\frac{1}{n})$.

Rappel : étant données deux suites réelles $(u_n)_n$, $(v_n)_n$, on dit que $u_n = O(v_n)$ s'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ et une constante $D > 0$ telle que $|u_n| \leq D|v_n|$ pour tout $n \geq N$.